

Untersuchung des De Quervain-Piccard'schen Seismographen und einiger allgemeiner seismometrischer Probleme.

Von der
Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich
zur Erlangung der

Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte

No. 358.

Promotionsarbeit

vorgelegt von

HENDRIK PETRUS BERLAGE JR.

aus HAAG—HOLLAND

Referent: Herr Prof. Dr. E. MEISSNER

Korreferent: Herr Privatdoz. Dr. A. DE QUERVAIN

Buchdruckerei J. Waltman jr.
Delft.

April 1924.

Untersuchung des De Quervain–Piccard'schen Seismographen und einiger allgemeiner seismometrischer Probleme.

Von H. P. BERLAGE Jr.

INHALT.

- I. Vorbemerkung über den Zweck des untersuchten Instrumentes.
 - II. Das Schema des Pendels.
 - III. Das Schema der Untersuchung der Pendelschwingungen.
 - IV. Die Koppelung der Horizontalschwingung und der Schaukelung.
 - V. Die Koppelung der Horizontalschwingung und der Torsionsschwingung.
 - VI. Die Koppelung der Vertikalschwingung und der Schaukelung.
 - VII. Gekoppelte Schwingungen in zwei Freiheitsgraden, wenn die Bewegungen gedämpft sind.
 - VIII. Gekoppelte Schwingungen in zwei Freiheitsgraden, wenn eine der Bewegungen erzwungen ist.
 - IX. Das Schema des Betongerüstes.
 - X. Die Eigenschwingungen des Betongerüstes.
 - XI. Numerische Angaben.
 - XII. Verwertung der numerischen Angaben für die Horizontalschwingung und die Schaukelung.
 - XIII. Verwertung der numerischen Angaben für die Vertikalschwingung und die Schaukelung.
 - XIV. Verwertung der numerischen Angaben für die Eigenschwingungen des Betongerüstes.
 - XV. Das Schema der Registriervorrichtung.
 - XVI. Der Einfluss der Gegenfedern auf die verschiedenen Perioden.
 - XVII. Der Einfluss der Gegenfedern auf die Torsionsschwingung.
 - XVIII. Die Gegenfedern und die maximale Bodenbeschleunigung.
 - XIX. Versuche und Schlussfolgerungen.
 - XX. Das Schema der Astatisierung.
 - XXI. Betrachtungen über die Einsätze eines Bebens.
 - XXII. Ein Kriterium der Zuverlässigkeit von Instrumenten verschiedener Bauart.
 - XXIII. Das Japanische Beben vom 1-IX-1923 und die Frage der Herdtiefe.
 - XXIV. Schluss-Bemerkungen.
-

Diese Arbeit entsprang einer Anregung von Seiten Professor Meissners zu einer Untersuchung des 1922 auf der Schweiz. Erdbebenwarte in Zürich aufgestellten, von Prof. A. de Quervain und Prof. A. Piccard neu konstruierten Universal-Seismographen. Kürzere Vorarbeiten auf dem Gebiete der Seismologie setzten mich in die Lage, eine solche Untersuchung zu unternehmen. Für die Erlaubnis, einige Zeit in der Bilt arbeiten zu dürfen, bin ich dem Direktor des dortigen meteorologischen Institutes, Prof. Dr. E. van Everdingen, zu Dank verpflichtet, sowie Herrn G. van Dijk für die Bereitwilligkeit, mit der er mir behülflich war. Die Zusammenarbeit mit Herrn Prof. de Quervain in Zürich im Sommer 1923 werde ich immer in angenehmster Erinnerung behalten. Namentlich bin ich ihm Dank schuldig für die Erlaubnis, am grossen Apparate Versuche anzustellen, und für seine Anregungen und Bemühungen in Bezug auf die vorliegende Arbeit. Im besondern danke ich auch Herrn Prof. Meissner für die mir dank seiner Einsicht stets zu teil gewordenen Einblicke in die wissenschaftlichen Probleme, die diese Arbeit betreffen. Endlich will ich nicht versäumen, den Herren Professoren Hirsch und Stodola in Zürich und Ehrenfest in Leiden für die mathematische, technische und theoretisch-physikalische Schulung zu danken, welche ich von ihnen empfang, ebenso allen denjenigen Gelehrten, welche zu meiner allgemeinen wissenschaftlichen Bildung beigetragen haben.

I. Vorbemerkung über den Zweck des untersuchten Instrumentes.

Dieses seismographische Pendel wurde konstruiert aus dem Bedürfnis heraus, vor allem die alpinen Erdbeben und überhaupt die kurzperiodischen Wellen der Nahebeben und der Anfangsphase der Fernbeben zu registrieren. Die Praxis erforderte die sehr starke Vergrößerung von ca. 1500. Von vornherein lag die Absicht vor, drei Komponenten der Bewegung aufzuzeichnen.

Einerseits war daher eine sehr grosse träge Masse nötig, andererseits aber schlossen Kosten und Raum die Installation von allzugrossen Massen aus. Dies führte zu der Lösung, alle drei Komponenten durch diese eine Masse registrieren zu lassen. Die bei dieser neuen Konstruktion auftretenden mechanischen Probleme werden im Folgenden untersucht.

II. Das Schema des Pendels.

Eine Masse von annähernd kubischer Gestalt wird getragen von 4 Federn F , welche ihrerseits an einer quadratischen Platte angehängt sind; diese ist mit einer Tragstange OP fest verbunden (Figur 1). Der Aufhängepunkt sei vorläufig durch ein Gerüst starr mit der Erde verbunden gedacht. In O geht die Tragstange in eine Schraubenspindel über, deren Mutter auf Kugeln gelagert ist. Dadurch wurde ein leichtes Heben und Senken der Masse mittels Drehung dieser Mutter ermöglicht. Ob man dabei die Stange OP im Punkte O als eingespannt oder als frei beweglich zu betrachten hat, ist aus dieser Konstruktion nicht ohne weiteres ersichtlich. Wir werden diese Tatsache berücksichtigen.

Es ist klar, dass die Masse die sechs Freiheitsgrade des freibeweglichen, starren, Körpers besitzt. Sie kann kleine Translationen längs den drei Achsen x, y, z , (welche wir durch den Schwerpunkt S_0 legen wollen) und Rotationen um diese Achsen ausführen.

Wenn man der Masse in irgend einem ihrer Punkte in einer beliebigen Richtung einen Stoss erteilt, so wird sie im allgemeinen in jedem der 6 Freiheitsgrade eine Bewegung ausführen. Wenn die Amplituden klein bleiben, kann die Bewegung als Ueberlagerung von 6 „Hauptschwingungen“ angesehen werden.

Neben den Schwingungen längs den 3 Achsen x, y, z und der Torsionsschwingung um die z Achse kann man etwa sprechen von einer Schaukelung um die x oder y Achse.

III. Das Schema der Untersuchung der Pendelschwingungen.

In der wirklichen Ausführung wird die Bewegung der Masse registriert in der Richtung der z Achse und in den beiden darauf und unter sich senkrecht stehenden Richtungen, welche mit den Buchstaben NS (Nord-Süd) und EW (Ost-West) bezeichnet sind (Figur 1).

Mit Rücksicht auf die Anordnung der Tragfedern wollen wir jedoch einfachheitshalber die Bewegungen in der Richtung der x, y und z Achse untersuchen. Es ist dies ja nur eine andere Art der Zerlegung. Auch die Schaukelungen um die NS oder EW Achse sind, abgesehen von der später zu besprechenden Astatisierung, nicht etwa gegen diejenigen um die x oder y Achse ausgezeichnet; denn das Massenträgheitsmoment des Klotzes ist aus Symmetriegründen für alle horizontale Achsen durch den Schwerpunkt gleich und (wie man leicht nachrechnet) muss auch die Schaukelungsperiode unter Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung für alle diese Achsen gleich ausfallen. Dies wird denn auch durch die Versuche bestätigt.

In erster Linie ist nun die Frage nach der Unabhängigkeit der Bewegungen in den verschiedenen Freiheitsgraden wichtig. Wie wir sehen werden, sind unter diesen Bewegungen mehrere, wenn auch in geringem Maasse, gekoppelt, und wir werden nacheinander die Koppelung der Horizontalschwingung und der Schaukelung, der Horizontalschwingung und der Torsionsschwingung, der Vertikalschwingung und der Schaukelung sorgfältig untersuchen.

Man ist wohl gezwungen, die Rechnung in solche Abschnitte zu zerlegen; sie geben immerhin zusammen ein ziemlich vollständiges Bild der kinematischen Verhältnisse. Das allgemeine Problem der kleinen Schwingungen nach 6 Koordinaten lässt sich zwar theoretisch erledigen, aber praktisch stösst die Durchführung auf zu grosse Komplikationen. Vorläufig wollen wir auch von jeder dämpfenden Wirkung absehen.

IV. Die Koppelung der Horizontalschwingung und der Schaukelung.

Wir wollen uns auf das Problem der Schwingungen in der $x-z$ Ebene beschränken, wobei wir jede vertikale Bewegung des Schwerpunktes als kleine Grösse zweiter Ordnung vernachlässigen. Dies ist erlaubt wenn

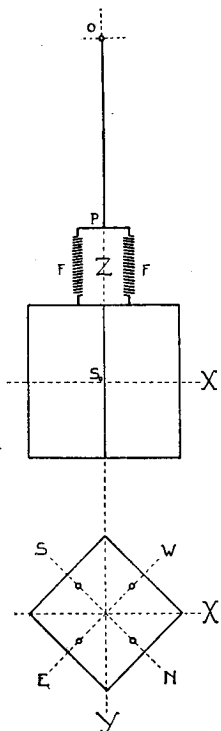


Fig. 1.

man von jeder absichtlichen Anregung der vertikalen Schwingung der Masse absieht. Es bleibt noch die Frage, ob die Tragstange im Punkte O als eingespannt oder als frei beweglich zu betrachten ist. Nach der Art der Konstruktion ist die Einspannung sicher nicht vollkommen, und wir werden darum beide Grenzfälle getrennt behandeln und die Resultate nachher numerisch vergleichen. Die Federn wollen wir einstweilen als in ihren Befestigungspunkten frei beweglich ansehen. Später werden wir auf die Unhaltbarkeit dieser Annahme zurückkommen müssen.

a. Die Tragstange sei in O frei beweglich (Figur 2).

Wir denken uns den Schwerpunkt S_0 der Masse um x aus der Gleichgewichtslage verschoben und die Masse über einen Winkel φ um eine Achse gedreht, welche senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Von der Masse sind deuthlichkeitshalber nur der Schwerpunkt und seine starre Verbindung mit den Tragfedern gezeichnet. M sei die Masse, Θ das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Horizontale durch den Schwerpunkt. Es seien weiter l_1 und l_2 die Federlängen, K_1 und K_2 die ihnen entsprechenden Federkräfte, f sei die Federkonstante. Schliesslich sei ψ der Winkel, welchen die Tragstange, ψ' der Winkel, welchen die Tragfedern mit der Vertikale einschliessen.

Wir nehmen an, dass die Resultante R der beiden Federkräfte durch den Punkt O gehe, was auf die Vernachlässigung der Trägheit der Aufhängestange herausläuft. Es sei von vornherein von der Berücksichtigung kleiner Grössen zweiter Ordnung abgesehen. Man erhält daher die Beziehung:

$$\psi' = \psi + \frac{4fb^2(\psi - \varphi)}{lMg} \quad (1)$$

indem:

$$K_1 = \frac{Mg}{4} + fb(\psi - \varphi) \text{ und } K_2 = \frac{Mg}{4} - fb(\psi - \varphi) \quad (2)$$

Für die Längen der Senkrechten von S_0 auf K_1 und K_2 findet man:

$$d_1 = \frac{a \left[1 + \frac{4fb^2}{lMg} \right] \left[x - \varphi(l+h) \right]}{l+h-a + \frac{h-a}{l} \cdot \frac{4fb^2}{Mg}} \pm b \quad (3)$$

Nach dem Schwerpunktsatze ist nun aber:

$$2(K_1 + K_2)\psi' + M \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (4)$$

und ferner ist

$$-2K_1d_1 - 2K_2d_2 + \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \quad (5)$$

welche Gleichungen sich auf die Form bringen lassen:

$$x - \varphi \left(a + \frac{b^2}{\frac{b^2}{l} + s} \right) + \frac{l+h-a + \frac{h-a}{l} \cdot \frac{b^2}{s}}{g \left(1 + \frac{b^2}{ls} \right)} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (6)$$

und

$$-x + \varphi(l+h) + \frac{l+h-a + \frac{h-a}{l} \cdot \frac{b^2}{s}}{g \left\{ a + \frac{b^2}{s} \left(1 + \frac{a}{l} \right) \right\}} k^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \quad (7)$$

Hierin bedeuten:

$$s = \frac{Mg}{4f}$$

die Verlängerung der Tragfedern im Gleichgewichtszustande und

$$k^2 = \frac{\Theta}{M}$$

das Quadrat des mit Θ korrespondierenden Trägheitsradius der Masse.

b. Die Tragstange sei in O eingespannt (Figur 3).

Das Problem ist dem soeben besprochenen analog. Nur müssen als neue Bezeichnungen eingeführt werden die Verschiebung x_0 des Punktes P und der Winkel ψ_0 , welchen die Tragstange in P mit der Vertikalen einschliesst. Es muss nun untersucht werden, wie die verschiedenen Teile des Pendels sich einstellen, wenn man

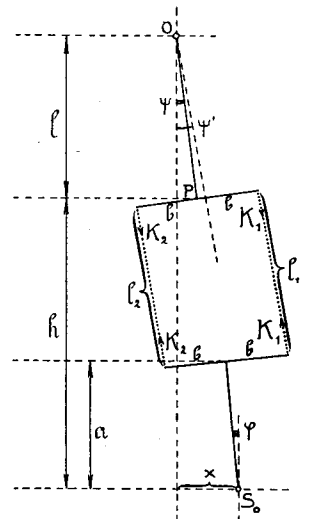


Fig. 2.

den Schwerpunkt der Masse um x aus der Gleichgewichtslage verschiebt und die Masse um den Winkel φ um eine Achse senkrecht zur xz Ebene gedreht hat. Von allen Grössen, welche unendlich klein gegen die Verschiebungen sind, sei von vornherein abgesehen.

Wir erhalten für die Federkräfte:

$$K_1 = \frac{Mg}{4} + fb(\varphi - \psi_0) \text{ und } K_2 = \frac{Mg}{4} - fb(\varphi - \psi_0) \quad (8)$$

und für die Senkrechten aus S_0 auf die Kräfte K_1 und K_2

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{ha\varphi - a(x - \eta_0)}{h - a} \pm b \quad (9)$$

Es sind jetzt die simultanen Bewegungsgleichungen,

$$2(K_1 + K_2) \frac{x - a\varphi - \eta_0}{h - a} + M \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad (10)$$

und

$$2K_1 d_1 + 2K_2 d_2 + \Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 \quad (11)$$

Zur Ermittlung der Beziehungen zwischen x , φ einerseits und η_0 , ψ_0 andererseits betrachten wir die Tragstange gesondert (Figur 4). Es wirken im Punkte P auf die Stange eine Kraft vertikal abwärts, unendlich wenig von Mg verschieden, eine horizontale Kraft

$$K_0 = 2(K_1 + K_2) \frac{x - a\varphi - \eta_0}{h - a} \quad (12)$$

und ein Drehmoment

$$M_0 = 2K_1 b - 2K_2 b = 4fb^2(\varphi - \psi_0) \quad (13)$$

das von den Federkräften herrührt.

Die Ablenkung eines Stabelementes im Abstände ξ vom Punkte O sei η . Sodann gilt nach der Elastizitätslehre die Gleichung:

$$K_0(l - \xi) - Mg(\eta_0 - \eta) + 4fb^2(\varphi - \psi_0) = IE \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \quad (14)$$

wo I das axiale Trägheitsmoment des Stangenquerschnittes und E den Elastizitätsmodul des Stangenmaterials bedeuten. Die Lösung dieser Gleichung lässt sich schreiben in der Form:

$$\eta = P + Q\xi + Rsh(p\xi) + SCh(p\xi) \quad (15)$$

wo

$$P = -\frac{K_0 l - Mg\eta_0 + 4fb^2(\varphi - \psi_0)}{Mg}, \quad Q = \frac{K_0}{Mg} \text{ und } p = \sqrt{\frac{Mg}{IE}} \quad (16)$$

ist.

Die Konstanten R und S erhält man aus den Randbedingungen:

$$\left[\eta \right]_{\xi=0} = 0 \quad \left[\frac{d\eta}{d\xi} \right]_{\xi=0} = 0 \quad (17)$$

und zwar findet man:

$$R = -\frac{K_0}{Mg} \sqrt{\frac{IE}{Mg}} \text{ und } S = \frac{K_0 l - Mg\eta_0 + 4fb^2(\varphi - \psi_0)}{Mg} \quad (18)$$

Nun sind aber:

$$\left[\eta \right]_{\xi=l} = \eta_0 \quad \left[\frac{d\eta}{d\xi} \right]_{\xi=l} = \psi_0 \quad (19)$$

Diese Bedingungen liefern uns die Beziehungen:

$$-4fb^2(\varphi - \psi_0) - K_0 \sqrt{\frac{IE}{Mg}} sh\left(l \sqrt{\frac{Mg}{IE}}\right) + \{K_0 l - Mg\eta_0 + 4fb^2(\varphi - \psi_0)\} Ch\left(l \sqrt{\frac{Mg}{IE}}\right) = 0 \quad (20)$$

und

$$\frac{K_0}{Mg} - \frac{K_0}{Mg} Ch\left(l \sqrt{\frac{Mg}{IE}}\right) + \frac{K_0 l - Mg\eta_0 + 4fb^2(\varphi - \psi_0)}{Mg} \sqrt{\frac{Mg}{IE}} sh\left(l \sqrt{\frac{Mg}{IE}}\right) \psi_0 \quad (21)$$

Weil man aber im praktischen Beispiele findet, dass

$$Ch\left(l \sqrt{\frac{Mg}{IE}}\right) \sim sh\left(l \sqrt{\frac{Mg}{IE}}\right) = \text{sehr gross} \quad (22)$$

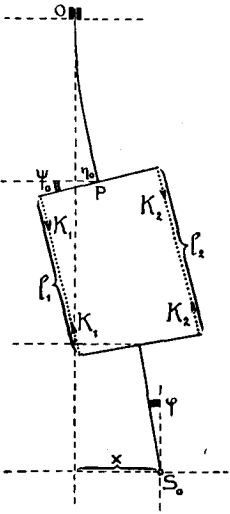


Fig. 3.

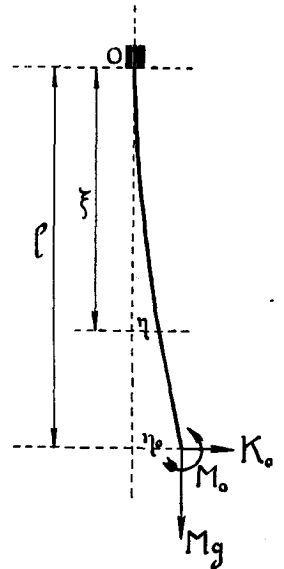


Fig. 4.

können wir für unsren Fall die Beziehungen (20) und (21) ohne wesentliche Ungenauigkeit reduzieren auf:

$$4 f b^2 (\varphi - \psi_0) = M g \eta_0 - K_0 \left(l - \sqrt{\frac{I E}{M g}} \right) = M g \sqrt{\frac{I E}{M g}} \psi_0 - K_0 \sqrt{\frac{I E}{M g}} \quad (23)$$

Hiemit sind die beiden Beziehungen zwischen den Grössen x , φ einerseits und η_0 , ψ_0 anderseits hergestellt, auf welche wir abzielten. Wenn man nun die Grössen η_0 und ψ_0 eliminiert, wird man auf die endgültigen Bewegungsgleichungen geführt, welche die Form erhalten:

$$x - \varphi \left(a + \frac{b^2}{b^2 \sqrt{\frac{M g}{I E}} + s} \right) + \frac{l + h - a - \sqrt{\frac{I E}{M g}} - b^2 \sqrt{\frac{M g}{I E}} + s}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad (24)$$

$$-x + \varphi \left(l + h - \sqrt{\frac{I E}{M g}} \right) + \frac{l + h - a - \sqrt{\frac{I E}{M g}} - b^2 \sqrt{\frac{M g}{I E}} + s}{g \left(a + \frac{b^2}{b^2 \sqrt{\frac{M g}{I E}} + s} \right)} k^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 \quad (25)$$

Diese Gleichungen sind durchaus ähnlich den Gleichungen, welche wir unter der Annahme, dass die Tragstange in O frei beweglich sei, ableiteten. Bei der numerischen Auswertung zur Bestimmung der Perioden der Horizontalschwingung und der Schaukelung werden wir sie benutzen.

Die Bewegungen des Seismographenpendels in den zwei Koordinaten x und φ erscheinen gekoppelt, und es soll schon hier darauf hingewiesen werden, dass die betreffende Koppelung der beiden Freiheitsgrade die wichtigste ist. Denn wir sehen ja, dass bei dieser Konstruktion mit jeder Horizontalschwingung auch die Schaukelung angeregt wird und dass sie, wie später nachgerechnet werden soll, mit nicht unbedeutender Amplitude im Horizontalseismogramm nachweisbar sein muss.

V. Die Koppelung der Horizontalschwingung und der Torsionsschwingung.

Bei theoretisch fehlerloser Ausführung des Apparates wäre es ausgeschlossen, dass durch die Horizontalschwingungen Torsionsschwingungen bis zum Effekt erster Ordnung angeregt würden.

Wegen der Wichtigkeit der Koppelung verschiedener Freiheitsgrade für die Reinheit der Registrierung müssen wir aber genau zusehen, ob nicht kleine Konstruktionsfehler eine solche Koppelung veranlassen könnten. Man muss auch sehr beachten, dass ein Seismograph nicht zum Zwecke der Registrierung der freien Schwingungen des Instrumentes gebraucht wird, sondern dass die Schwingungen des Seismographenpendels erzwungen sind und daher, wenn irgendwelche Eigenschwingungen nicht gedämpft sein sollten, (wie in unsrem Falle die Torsionsschwingung und die Schaukelungen) Resonanzerscheinungen zu befürchten wären.

Eine mögliche Ursache für die unbeabsichtigte Erregung von Torsionsschwingungen ist eine Excentricität des Schwerpunktes der Masse. Später, wenn wir die Registriervorrichtung besprechen werden, wollen wir auf eine andere hinweisen. In diesem Abschnitte sei nur die excentrische Lage des Schwerpunktes berücksichtigt. Man kann sich nämlich denken, dass der Schwerpunkt infolge der grossen Starrheit der Tragstange und der Tragfedern nicht mit der Lotlinie durch den Aufhängepunkt zusammenfällt, sondern um eine kleine Länge e davon entfernt ist. Die betreffende Kontrollmessung bei der Montage zwingt uns, anzunehmen, dass dieses e von sehr geringer Grössenordnung sei.

Einfachheitshalber legen wir das Koordinatensystem durch den Lotpunkt so, dass der Schwerpunkt S_0 in der Ruhelage in die x Achse fällt (Figur 5). Für die Torsionsschwingung ist ja die Lage des Achsenkreuzes ohne jegliche Bedeutung. Es werde vorläufig von jeder dämpfenden Wirkung, auch auf die Horizontalschwingung abgesehen.

Der Punkt der Masse, welcher in der Ruhelage mit dem Lotpunkt zusammenfällt, sei um kleine Strecken x_1 und y_1 verschoben und die Masse um einen kleinen Winkel φ gedreht. Dann treten rüctreibende Kräfte und ein rüctreibendes Moment proportional zu diesen Ablenkungen auf.

λ_1 λ_2 λ_3 sind die Proportionalitätsfaktoren. Diese Konstanten sind durch die Konstruktion bedingt.

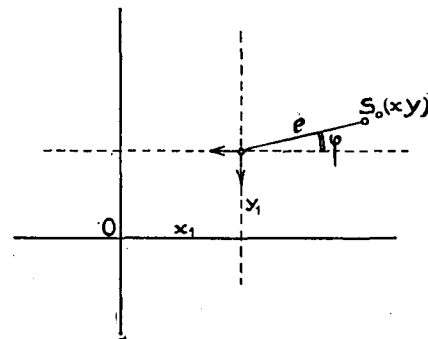


Fig. 5.

Wenn x und y die Koordinaten des Schwerpunktes sind, erhält man die drei Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 x_1 + M \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \\ \lambda_2 y_1 + M \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0 \\ \lambda_3 \varphi + \lambda_1 x_1 e \sin \varphi - \lambda_2 y_1 e \cos \varphi + \Theta_i \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Es ist dabei Θ_i das Massenträgheitsmoment in Bezug auf eine Vertikale durch den Schwerpunkt. Nun ist aber:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x - e \cos \varphi \\ y_1 &= y - e \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Also erhalten wir schliesslich, indem wir kleine Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 x + M \frac{d^2 x}{dt^2} &= \lambda_1 e \\ \lambda_2 y - \lambda_2 e \varphi + M \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0 \\ \lambda_3 \varphi - \lambda_2 e y + \Theta_i \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Die erste der Gleichungen, welche von den anderen unabhängig ist, wollen wir beiseite lassen. Uns interessiert nur die Koppelung, welche zwischen den beiden letzteren besteht.

Wie später gezeigt wird, kann die gegenseitige Beeinflussung der Horizontal- und Torsionsschwingung nur sehr gering sein und vernachlässigt werden.

VI. Die Koppelung der Vertikalschwingung und der Schaukelung.

Wir beschränken uns auf zwei Tragfedern, damit sich ein ebenes Problem ergibt. Es werde jetzt angenommen, dass die Federkonstanten nicht genau dieselbe Grösse besitzen und also zwischen f_1 und f_2 zu unterscheiden sei (Figur 6).

Wir nehmen ferner an, der Punkt P bleibe in Ruhe, was dem Grenzfall einer starren Tragstange entspricht. Diese Annahme ist nicht unvermeidlich, aber sie führt zu besserer Uebereinstimmung mit den Beobachtungen als diejenige einer nachgiebigen Tragstange, ausserdem vereinfacht sie die Rechnung. Um eine weitere Vereinfachung zu erzielen, soll auch die horizontale Bewegung des Schwerpunktes gegenüber den vertikalen vernachlässigt werden, was vielleicht weniger genau zutrifft.

Mit den Federkräften:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{Mg}{2} - f_1 (z + b \varphi) \\ K_2 &= \frac{Mg}{2} - f_2 (z - b \varphi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

und den Abständen des Schwerpunktes von diesen Kräften:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= b - \frac{h a \varphi}{h - a} \\ d_2 &= b + \frac{h a \varphi}{h - a} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

finden wir jetzt für die simultanen Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi b (f_1 - f_2) + z (f_1 + f_2) + M \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \\ \varphi \left[b^2 (f_1 + f_2) + Mg \frac{h a}{h - a} \right] + z b (f_1 - f_2) + \Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Der Exponentialansatz $\varphi = \Phi e^{\alpha t}$ und $z = Z e^{\alpha t}$ ergibt zur Bestimmung von α die charakteristische Gleichung

$$p + \alpha^2 q + \alpha^4 r = 0 \dots \dots \dots (4)$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} p &= 4 b^2 f_1 f_2 + (f_1 + f_2) Mg \frac{h a}{h - a} \\ q &= (f_1 + f_2) (\Theta + M b^2) + M^2 g \frac{h a}{h - a} \\ r &= \Theta M \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

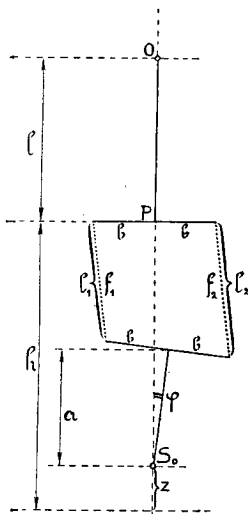


Fig. 6.

Es ist:

$$\alpha = \pm i \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4 p r}}{2 r}} \quad \dots \quad (6)$$

Die vollständigen Lösungen der Gleichungen (3) sind:

$$\left. \begin{aligned} z &= Z_1 \cos \omega_1 t + Z_2 \sin \omega_1 t + Z_3 \cos \omega_2 t + Z_4 \sin \omega_2 t \\ \varphi &= \Phi_1 \cos \omega_1 t + \Phi_2 \sin \omega_1 t + \Phi_3 \cos \omega_2 t + \Phi_4 \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (7)$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4 p r}}{2 r}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4 p r}}{2 r}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (8)$$

Es sind aber noch die Anfangsbedingungen festzulegen, etwa

$$\left. \begin{aligned} \text{für } t = 0 \text{ sei } z &= 0 \quad z' = z_0' \\ \varphi &= 0 \quad \varphi' = \varphi_0' \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (9)$$

Damit wird die Zahl der Konstanten auf vier reduziert, und man erhält:

$$\left. \begin{aligned} z &= Z_1 \cos \omega_1 t + Z_2 \sin \omega_1 t - Z_1 \cos \omega_2 t + \frac{z_0' - Z_2 \omega_1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \\ \varphi &= \Phi_1 \cos \omega_1 t + \Phi_2 \sin \omega_1 t - \Phi_1 \cos \omega_2 t + \frac{\varphi_0' - \Phi_2 \omega_1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (10)$$

Zur Einsetzung dieser Werte in die Gleichungen (3) brauchen wir die zweiten Ableitungen:

$$\left. \begin{aligned} z'' &= -Z_1 \omega_1^2 \cos \omega_1 t - Z_2 \omega_1^2 \sin \omega_1 t + Z_1 \omega_2^2 \cos \omega_2 t - (z_0' - Z_2 \omega_1) \omega_2 \sin \omega_2 t \\ \varphi'' &= -\Phi_1 \omega_1^2 \cos \omega_1 t - \Phi_2 \omega_1^2 \sin \omega_1 t + \Phi_1 \omega_2^2 \cos \omega_2 t - (\varphi_0' - \Phi_2 \omega_1) \omega_2 \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (11)$$

und wenn wir etwa die erste der Gleichungen (3) wählen erhalten wir die Bedingung:

$$\left. \begin{aligned} &[\Phi_2 b (f_1 - f_2) + Z_2 (f_1 + f_2) - M Z_2 \omega_1^2] \sin \omega_1 t + \\ &+ [\Phi_1 b (f_1 - f_2) + Z_1 (f_1 + f_2) - M Z_1 \omega_1^2] \cos \omega_1 t + \\ &+ \left[\frac{\varphi_0' - \Phi_2 \omega_1}{\omega_2} b (f_1 - f_2) + \frac{z_0' - Z_2 \omega_1}{\omega_2} (f_1 + f_2) - (z_0' - Z_2 \omega_1) \omega_2 M \right] \sin \omega_2 t \\ &+ [-\Phi_1 b (f_1 - f_2) - Z_1 (f_1 + f_2) + M Z_1 \omega_2^2] \cos \omega_2 t = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (12)$$

Jeder Koeffizient der goniometrischen Funktionen muss deshalb einzeln verschwinden und wir erhalten zur Bestimmung der Konstanten Z_1, Z_2, Φ_1, Φ_2 die vier Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2 b (f_1 - f_2) + Z_2 (f_1 + f_2) - M \omega_1^2 &= 0 \\ \Phi_1 b (f_1 - f_2) + Z_1 (f_1 + f_2) - M \omega_1^2 &= 0 \\ \Phi_2 \omega_1 b (f_1 - f_2) + Z_2 \omega_1 (f_1 + f_2) - M \omega_2^2 &= \varphi_0' b (f_1 - f_2) + z_0' (f_1 + f_2 - M \omega_2^2) \\ \Phi_1 b (f_1 - f_2) + Z_1 (f_1 + f_2) - M \omega_2^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (13)$$

Aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen folgt:

$$Z_1 = 0 \quad \Phi_1 = 0 \quad \dots \quad (14)$$

Es bleiben nur:

$$\left. \begin{aligned} Z_2 &= \frac{\varphi_0' b (f_1 - f_2) + z_0' (f_1 + f_2 - M \omega_2^2)}{M \omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \\ \Phi_2 &= - \frac{\varphi_0' b (f_1 - f_2) + z_0' (f_1 + f_2 - M \omega_2^2)}{M \omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \cdot \frac{(f_1 + f_2 - M \omega_1^2)}{b (f_1 - f_2)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (15)$$

Wir wollen nun hier im besondern den Fall betrachten, dass die Schaukelung im Zeitmoment $t = 0$ nicht angeregt war, und zu dieser Zeit etwa ein vertikaler Erdstoss erfolgt. Es ist von Bedeutung, zu erfahren, wie sich die Schaukelung dabei verhält. Wir setzen also $\varphi_0' = 0$ und finden:

$$\left. \begin{aligned} Z_2 &= \frac{z_0' (f_1 + f_2 - M \omega_2^2)}{M \omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \\ \Phi_2 &= - \frac{z_0' (f_1 + f_2 - M \omega_1^2) (f_1 + f_2 - M \omega_2^2)}{M b \omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2) (f_1 - f_2)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (16)$$

Dieses Resultat ist zu diskutieren.

Wir fanden:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4 p r}}{2 r}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4 p r}}{2 r}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (8)$$

Die Diskriminante wird:

$$q^2 - 4pr = \left[(f_1 + f_2)(\Theta - Mb^2) - M^2g \frac{ha}{h-a} \right]^2 + 4\Theta Mb^2 (f_1 - f_2)^2 \quad (17)$$

Die aus zwei Quadraten zusammengesetzte Diskriminante ist immer positiv, wie zu erwarten war. Wenn f_1 und f_2 wenig von einander verschieden sind, können wir eine Vereinfachung erzielen. Wir setzen:

$$f_1 = f + \Delta f \quad f_2 = f \quad (18)$$

und schreiben:

$$\sqrt{q^2 - 4pr} = \sqrt{\left[(2f + \Delta f)(\Theta - Mb^2) - M^2g \frac{ha}{h-a} \right]^2 + 4\Theta Mb^2 \Delta^2 f^2} \quad (19)$$

Dies ist, weil Δ klein ist, gleich

$$\begin{aligned} & (2f + \Delta f)(\Theta - Mb^2) - M^2g \frac{ha}{h-a} + \frac{2\Theta Mb^2 \Delta^2 f^2}{(2f + \Delta f)(\Theta - Mb^2) - M^2g \frac{ha}{h-a}} \\ &= (2f + \Delta f)(\Theta - Mb^2) - M^2g \frac{ha}{h-a} + \lambda \Delta^2 f^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Daher ist:

$$q + \sqrt{q^2 - 4pr} = (4f + 2\Delta f)\Theta + \lambda \Delta^2 f^2 \quad (21)$$

und

$$M\omega_1^2 = \frac{q + \sqrt{q^2 - 4pr}}{2\Theta} = 2f + \Delta f + K\Delta^2 f^2 \quad (22)$$

wo $K = \frac{\lambda}{2\Theta}$ bedeutet.

Schliesslich ist:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 - M\omega_1^2 &= 2f + \Delta f - M\omega_1^2 \\ &= K\Delta^2 f^2 \end{aligned}$$

also

$$\left. \begin{aligned} Z_2 &= \frac{z_0' (2f + \Delta f - M\omega_2^2)}{M\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \\ \Phi_2 &= -\frac{z_0' (2f + \Delta f - M\omega_2^2)}{Mb\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} K\Delta f \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Wir bemerken, dass wenn Δf klein ist, aber einen endlichen Betrag erreicht, beim vertikalen Erdstosse eine Schaukelung proportional diesem Δf einsetzt. Es lohnt sich, an dieser Stelle die Untersuchung allgemein noch etwas weiter zu führen, allgemein in dem Sinne, dass das Resultat sich auf jedes Paar gekoppelter Schwingungen übertragen lässt. Wir wollen den Fall

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \quad (24)$$

besprechen. Er ist wichtig im Hinblick auf die Astatisierung des Seismographen. Sie kann bewirken, dass gerade dieser Fall eintritt.

$\omega_1 = \omega_2$ hat zur Folge $q^2 - 4pr = 0$. Mit Rücksicht auf (17) folgt, dass jedes der in der Diskriminante auftretenden Quadrate verschwindet, dass also:

$$f_1 = f_2 \quad (25)$$

aber auch:

$$(f_1 + f_2)(\Theta - Mb^2) = M^2g \frac{ha}{h-a}$$

oder

$$2f(\Theta - Mb^2) = M^2g \frac{ha}{h-a} \quad (26)$$

Aber es ist:

$$q = 2f(\Theta + Mb^2) + M^2g \frac{ha}{h-a}$$

also folgt:

$$q = 4f\Theta \quad (27)$$

und

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{\frac{2f}{M}} \quad (28)$$

Ueber das tatsächliche Auftreten dieser Erscheinung werden wir weiter unten (XX) bei der Behandlung der Astatisierung und ihrer Eigentümlichkeiten sprechen.

Weil aber die erzwungenen Schwingungen gegenüber den Eigenschwingungen eines Seismographen im Betriebe weitaus wichtiger sind, wollen wir jetzt zu diesen übergehen.

VII. Gekoppelte Schwingungen in zwei Freiheitsgraden, wenn die Bewegungen gedämpft sind.

Zwei Abschnitte allgemeiner Art mögen hier eingeschoben werden. In den vorhergehenden betrachteten wir die Koppelungen, welche zwischen den Bewegungen der Masse in verschiedenen Freiheitsgraden auftreten, ohne auf irgendwelche Astatisierungs- und Registrier-Vorrichtungen Rücksicht zu nehmen. Auch sahen wir von jeder Dämpfung ab. Die Paare simultaner Gleichungen, auf welche wir stiessen, haben alle die Form:

$$\left. \begin{aligned} a_1 y + b_1 x + d_1 x'' &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + d_2 y'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

bei welcher man von einer Kraftkoppelung spricht. Die vollständige Lösung eines solchen Paares bietet, wie wir an einem Beispiele schon zeigten, nicht die geringste Schwierigkeit. Berücksichtigen wir nun die Tatsache, dass vielleicht beide Bewegungen eine absichtliche oder unabsichtliche Dämpfung erfahren, welche wir proportional der Geschwindigkeit der Bewegung in der jeweiligen Koordinate ansetzen wollen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 y + b_1 x + c_1 x' + d_1 x'' &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 y' + d_2 y'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Die vollständige Lösung eines solchen Paares ist in der Literatur mehrfach behandelt.¹⁾ Wir schreiben die Gleichungen symbolisch:

$$\left. \begin{aligned} a_1 y + (b_1 + c_1 D + d_1 D^2) x &= 0 \\ a_2 x + (b_2 + c_2 D + d_2 D^2) y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Die Elimination von y ergibt für x die Gleichung:

$$(b_1 b_2 - a_1 a_2) x + (b_2 c_1 + b_1 c_2) x' + (b_2 d_1 + b_1 d_2 + c_1 c_2) x'' + (c_1 d_2 + c_2 d_1) x''' + d_1 d_2 x'''' = 0 \dots (4)$$

und eine analoge für y . Die Lösungen sind Summen von vier Exponentialfunktionen, von der Form:

$$C e^{\alpha t} \dots \dots \dots (5)$$

wo α eine der vier Wurzeln der charakteristischen Gleichung ist, welche wir schreiben wollen:

$$p + q\alpha + r\alpha^2 + s\alpha^3 + t\alpha^4 = 0 \dots \dots \dots (6)$$

Wir wollen nun speziell an Hand dieser Ableitung zeigen, dass auch im Falle, wo eine der beiden Gleichungen (1) kein Dämpfungsglied aufweist, die Bewegung in der entsprechenden Koordinate dennoch gedämpft ist.

Wenn eine der Hauptschwingungen, (welche zwei verschiedene Perioden aufweisen) ungedämpft sein sollte, äussert sich dies darin, dass unter den konjugiert komplexen Wurzeln α ein Paar rein imaginäre, auftritt. Also wäre auch die Gleichung

$$p - q\alpha + r\alpha^2 - s\alpha^3 + t\alpha^4 = 0 \dots \dots \dots (7)$$

erfüllt, und daher auch die folgenden:

$$q + s\alpha^2 = 0 \quad \text{und} \quad p + r\alpha^2 + t\alpha^4 = 0 \dots \dots \dots (8)$$

Die Bedingung dafür lautet:

$$\frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4pt}}{2t} = \frac{q}{s} \dots \dots \dots (9)$$

oder:

$$\frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{d_1 c_2 + d_2 c_1} = \frac{(b_1 d_2 + b_2 d_1 + c_1 c_2) \pm \sqrt{(b_2 d_1 - b_1 d_2 + c_1 c_2)^2 + 4(a_1 a_2 d_1 d_2 + b_1 d_2 c_1 c_2)}}{2 d_1 d_2}$$

Wenn einer der Dämpfungskoeffizienten c_1 oder c_2 verschwindet, lautet die Bedingung zunächst:

$$\frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{d_1 c_2 + d_2 c_1} = \frac{b_1 d_2 + b_2 d_1 \pm \sqrt{(b_2 d_1 - b_1 d_2)^2 + 4 a_1 a_2 d_1 d_2}}{2 d_1 d_2}$$

In den beiden Fällen aber, wo $c_1 = 0$ oder $c_2 = 0$ ist, kann man dieser Bedingung die Form geben:

$$b_2 d_1 - b_1 d_2 = \sqrt{(b_2 d_1 - b_1 d_2)^2 + 4 a_1 a_2 d_1 d_2} \dots \dots \dots (10)$$

und da $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ vorausgesetzt werden muss, ist sie nur erfüllt, wenn entweder

$$a_1 = 0 \quad \text{oder} \quad a_2 = 0 \dots \dots \dots (11)$$

ist, also wenn keine Koppelung der Freiheitsgrade existiert, was wir ja gerade ausschliessen.

¹⁾ Vergl. z. B. F. Kiebitz: Vollständige Lösung der Differentialgleichungen, u. s. w. Annalen der Physik 40 (1913).

Um zu keiner vorzeitigen Kritik Anlass zu geben, scheint es mir angezeigt zu betonen, dass *Energie, welche durch eine Koppelung von einem Freiheitsgrade auf den anderen übertragen werden kann, sich nicht dauernd in den ungedämpften Freiheitsgrad retten kann, sondern sich immer wieder durch die Koppelung zerstreut.*

VIII. Gekoppelte Schwingungen in zwei Freiheitsgraden, wenn eine der Bewegungen erzwungen ist.

Bis jetzt betrachteten wir ausschliesslich die Eigenschwingungen des Apparates. Nunmehr sollen erzwungene Schwingungen untersucht werden und zwar in der folgenden für die Praxis wichtigen Form.

Es möge die Schwingung in einem Freiheitsgrade erzwungen harmonisch sein. Die Bewegungen seien gedämpft. Die simultanen Gleichungen lauten jetzt:

$$\left. \begin{aligned} a_1 y + b_1 x + c_1 x' + d_1 x'' &= A \sin \omega t \\ a_2 x + b_2 y + c_2 y' + d_2 y'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Diesen Fall findet man ausführlich diskutiert bei M. WIEN.¹⁾ Die allgemeine Lösung dieses Gleichungspaares enthält zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 y + b_1 x + c_1 x' + d_1 x'' &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 y' + d_2 y'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

welche aber für uns jetzt nicht wichtig ist. Wir wollen dagegen kurz die Eigenarten der besonderen Lösung betrachten, welche von dem goniometrischen Gliede der ersten Gleichung herrührt.

Mit dem Ansatz:

$$x = P \sin (\omega t + \gamma) \text{ und } y = Q \sin (\omega t + \delta) \dots \dots \dots (3)$$

gehen die beiden Gleichungen über in:

$$\begin{aligned} \sin (\omega t + \delta) [a_1 Q \cos (\gamma - \delta) + b_1 P - d_1 \omega^2 P] + \\ + \cos (\omega t + \delta) [a_1 Q \sin (\gamma - \delta) + c_1 \omega P] &= A \sin \omega t \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sin (\omega t + \gamma) [b_2 Q + a_2 P \cos (\gamma - \delta) - d_2 \omega^2 Q] + \\ + \cos (\omega t + \gamma) [-a_2 P \sin (\gamma - \delta) + c_2 \omega Q] &= 0 \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

Es lauten daher die vier Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} a_1 Q \cos (\gamma - \delta) + (b_1 - d_1 \omega^2) P &= A \cos \delta \\ a_1 Q \sin (\gamma - \delta) + c_1 \omega P &= -A \sin \delta \\ (b_2 - d_2 \omega^2) Q - a_2 P \cos (\gamma - \delta) &= 0 \\ c_2 \omega Q - a_2 P \sin (\gamma - \delta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Man findet:

$$\operatorname{tg} (\gamma - \delta) = \frac{-c_2 \omega}{(b_2 - d_2 \omega^2)}$$

und damit:

$$\cos (\gamma - \delta) = \frac{b_2 - d_2 \omega^2}{\sqrt{(b_2 - d_2 \omega^2)^2 + c_2^2 \omega^2}}, \quad \sin (\gamma - \delta) = \frac{-c_2 \omega}{\sqrt{(b_2 - d_2 \omega^2)^2 + c_2^2 \omega^2}} \dots \dots \dots (7)$$

Weiter auch:

$$Q = \frac{-a_2}{\sqrt{(b_2 - d_2 \omega^2)^2 + c_2^2 \omega^2}} P \dots \dots \dots (8)$$

und

$$[a_1 Q \cos (\gamma - \delta) + (b_1 - d_1 \omega^2) P]^2 + [a_1 Q \sin (\gamma - \delta) + c_1 \omega P]^2 = A^2 \dots \dots \dots (9)$$

also:

$$P^2 \left[\left\{ -a_1 a_2 \frac{(b_2 - d_2 \omega^2)}{(b_2 - d_2 \omega^2)^2 + c_2^2 \omega^2} + (b_1 - d_1 \omega^2) \right\}^2 + \left\{ a_1 a_2 \frac{c_2 \omega}{(b_2 - d_2 \omega^2)^2 + c_2^2 \omega^2} + c_1 \omega \right\}^2 \right] = A^2 \dots \dots (10)$$

Damit sind P und Q bestimmt.

Für unsren Zweck genügt es, den Fall zu betrachten, wo $c_2 = 0$ ist, womit eine bedeutende Vereinfachung erzielt wird. Dies entspricht den drei Fällen der Koppelung, welche wir in den Abschnitten III, IV und V behandelten, denn in der wirklichen Ausführung und im Betriebe des Seismographen sind die Horizontal- und Vertikalschwingung gedämpft, die Schaukelung und die Torsionsschwingung dagegen nicht, wenn wir von geringer unabsichtlicher, aber immer vorhandener Dämpfung absehen.

Wir erhalten nunmehr aus (8) und (10):

¹⁾ M. WIEN: Ueber die Rückwirkung eines resonierenden Systems. Ann. der Phys. und der Chem. 61 1897.

$$\left. \begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{b_2 - d_2 \omega^2}{\{-a_1 a_2 + (b_1 - d_1 \omega^2)(b_2 - d_2 \omega^2)\}^2 + c_1^2 \omega^2 (b_2 - d_2 \omega^2)^2}} \cdot A \\ Q &= \sqrt{\frac{-a_2}{\{-a_1 a_2 + (b_1 - d_1 \omega^2)(b_2 - d_2 \omega^2)\}^2 + c_1^2 \omega^2 (b_2 - d_2 \omega^2)^2}} \cdot A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Es können, wie man sofort ersieht, weder P noch Q bei irgend einer Periode ω der störenden Kraft über alles Maass wachsen, weil die Summe der beiden Quadrate unter dem Wurzelzeichen des Nenners nicht verschwinden kann. Immerhin muss auf einen Punkt besonders aufmerksam gemacht werden. Wenn die Periode der Störung identisch ist mit der Periode der freien Schwingung des ungedämpften Freiheitsgrades, wenn also

$$b_2 - d_2 \omega^2 = 0 \dots \dots \dots (12)$$

ist, wird

$$P = 0 \text{ neben } Q = \frac{A}{a_1} \dots \dots \dots (13)$$

d. h. es ist folgender Zustand möglich.

Im sekundären Freiheitsgrade besteht eine solche Schwingung, dass der Freiheitsgrad, auf den die äussere Kraft wirkt, keine Auslenkungen zeigt. Dieses eigentümliche Verhalten wurde in der Tat, wie Wien angibt, durch Versuche mit erzwungen schwingenden gekoppelten Metallsaiten bestätigt. Für unsren Seismographen würde das folgendes bedeuten. Wenn eine harmonische Bodenbewegung eintritt von der Periode der Schaukelung, so wird nach Eintritt des stationären Zustandes die Horizontalkomponente des Instrumentes nichts aufzeichnen. Praktisch wird der Fall, wegen der Inhomogenität der Bodenschwingungen, wohl kaum in Frage kommen, aber die Theorie fordert seine Berücksichtigung.

Wichtig ist zu bemerken, dass mit (12) nicht korrespondiert das Minimum der Funktion:

$$f(\omega^2) = \{-a_1 a_2 + (b_1 - d_1 \omega^2)(b_2 - d_2 \omega^2)\}^2 + c_1^2 \omega^2 (b_2 - d_2 \omega^2)^2 \dots \dots \dots (14)$$

Also gibt es sogar Werte von ω , für welche

$$Q > \frac{A}{a_1}$$

und daher im Falle schwacher Koppelung sehr gross wird.

Wo also eine genügende Dämpfung von vornherein jede Resonanzerscheinung der Hauptschwingung ausschliesst kann sie nicht verhindern, dass es für die ungedämpfte Nebenschwingung eine Stelle und zwar dem Wesen der Sache gemäss nur eine Stelle gibt, wo bedeutende Resonanz auftritt. Wenn die Koppelung schwach ist, liegt die Resonanzperiode selbstverständlich sehr nahe bei der Periode der Eigenschwingung des ungedämpften Freiheitsgrades und dürfte in den von uns betrachteten Fällen damit zusammen fallen.

IX. Das Schema des Betongerüstes.

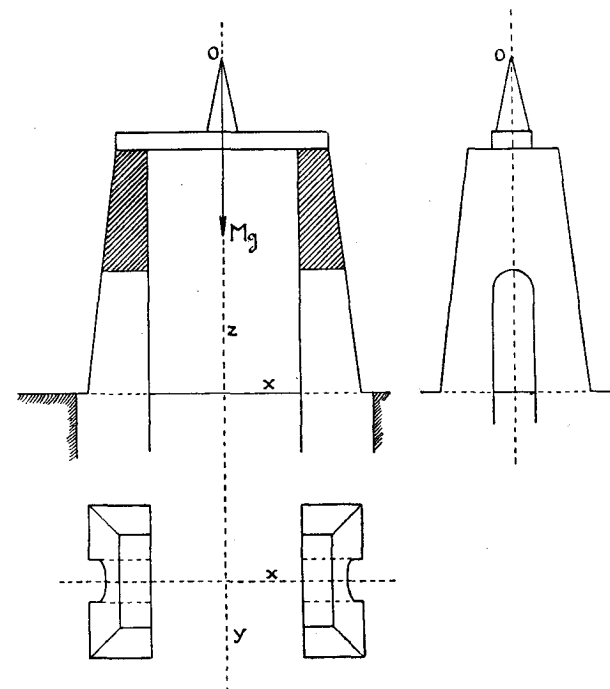


Fig. 7.

Das Betongerüst besteht aus zwei Pfeilern von der Form einer abgestumpften Pyramide von rechteckigem Querschnitte (Figur 7). Diese Pfeiler sind mit einem schweren Betonklotze im Boden fest verbunden und können daher unten für eingespannt gelten. Zwei Oeffnungen, welche den Zutritt an die Pendel-Masse von der Seite her gestatten, bedeuten eine Schwächung der Pfeiler. Ueber den Pfeilern ist ein Doppelträger gelagert. Auf diesem steht festverschraubt ein pyramidenförmiges Eisengerüst, an dem im oberen Punkte O das Seismographenpendel angehängt ist. Auf geringe Abweichungen der Konstruktion von diesem Schema brauchen wir hier nicht weiter einzugehen. Auch von den Schwingungen, welche die Masse in der Richtung der z Achse auf Rechnung der elastischen Durchbiegung des Doppelbalkens ausführen kann, wollen wir vollständig absehen. Diese Schwingung gibt eine ganz unbedeutende Verlangsamung der Vertikalschwingung, welche die Masse unter dem Einflusse der Tragfedern ausführt. Sie kann unter keinen Umständen störend auf den Betrieb wirken. Wichtiger erscheinen die Biegungsschwingungen der Betonpfeiler. Eine Untersuchung derselben ist unerlässlich.

Wir können uns auf die Schwingungen in der x, z Ebene beschränken. Sie haben die längste Periode und sind daher am gefährlichsten.

X. Die Eigenschwingungen des Betongerüstes.

Wir wollen einen Betonpfeiler betrachten, ihn als eingespannten Stab mit veränderlichem Querschnitte behandeln und vorläufig von der Druckbelastung der Masse absehen (Figur 8). Auch das Loch in dem Pfeiler wollen wir einstweilen unberücksichtigt lassen. Die Höhe des Pfeilers sei h , Länge und Breite unten und oben l_1, b_1 bzw. l_2, b_2 , Länge und Breite eines Stabelementes im Abstände z vom Boden seien l und b , die Ablenkung des Mittelpunktes eines solchen Elementes x . Der kleine Trägheitswiderstand gegen Drehung wird einfachheitshalber vernachlässigt. Wenn S und M Schubkraft und Biegemoment in einem Stabquerschnitte darstellen, so gibt die Elastizitätstheorie die Gleichungen:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \rho b l \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad M = I E \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad \dots \quad (1)$$

Es sind dabei ρ und E das spezifische Gewicht und der Elastizitätsmodul des Betons und

$$I = \frac{1}{12} l b^3.$$

Nun ist:

$$S = \frac{\partial M}{\partial z} = I E \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} + E \frac{\partial I}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad \dots \quad (2)$$

und

$$\frac{\partial S}{\partial z} = I E \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + 2 E \frac{\partial I}{\partial z} \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad \dots \quad (3)$$

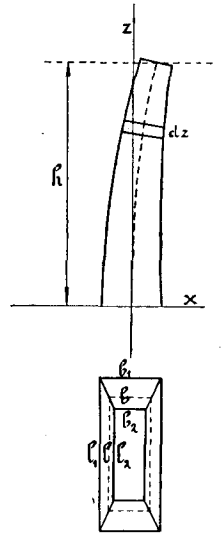


Fig. 8.

oder damit:

$$\frac{E}{\rho} \left[I \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial I}{\partial z} \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right] + b l \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$\frac{E}{\rho}$ hat eine sehr einfache Bedeutung. Es ist das Quadrat der Geschwindigkeit, mit der sich Kompressionen im Stab fortpflanzen. Wir bezeichnen sie mit a .

Um nicht in zu grosse Komplikationen zu geraten, wollen wir annehmen, dass das Verhältnis b/l konstant ist und schreiben:

$$\frac{b}{l} = \lambda = \frac{b_1 - b_2}{l_1 - l_2} \quad \dots \quad (5)$$

Machen wir schliesslich den bekannten Ansatz:

$$x = U \cdot Z \quad \dots \quad (6)$$

wo U nur eine Funktion von t , Z nur eine solche von z sein soll, so bekommen wir

$$\frac{\frac{1}{12} b^2 \frac{\partial^4 Z}{\partial z^4} + \frac{2}{3} b \left\{ \frac{b_2 - b_1}{h} \right\} \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} + \left\{ \frac{b_2 - b_1}{h} \right\}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}{Z} = - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \dots \quad (7)$$

Wir bemerken, da jeder Bruch nur eine der Variablen enthält, dass beide Seiten dieser Gleichung gleich einer und derselben Konstanten sein müssen. Da die Bewegung periodisch verläuft, ist die Konstante positiv, sagen wir k^2 . Denn es folgt daraus:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + a^2 k^2 U = 0 \quad \dots \quad (8)$$

also

$$U = A_1 \cos (akt) + A_2 \sin (akt) \quad \dots \quad (9)$$

Weiter bleibt zu lösen die Gleichung:

$$\frac{1}{12} b^2 \frac{\partial^4 Z}{\partial z^4} + \frac{2}{3} b \left\{ \frac{b_2 - b_1}{h} \right\} \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} + \left\{ \frac{b_2 - b_1}{h} \right\}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 Z = 0 \quad \dots \quad (10)$$

Wir führen die Grössen ein:

$$p = \frac{1}{12} b_1^2 \quad q = - \frac{1}{6} \frac{b_1 (b_1 - b_2)}{h} \quad r = \frac{1}{12} \left\{ \frac{b_1 - b_2}{h} \right\}^2 \quad \dots \quad (11)$$

und bemerken, dass die partiellen durch totale Ableitungen ersetzt werden können.

Es wird:

$$(p + qz + rz^2) \frac{d^4 Z}{dz^4} + (4q + 8rz) \frac{d^3 Z}{dz^3} + 12r \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \quad (12)$$

Die Lösung dieser Gleichung mit Hilfe einer Reihenentwicklung erscheint von vornherein für die praktische Anwendung zu kompliziert. Mit dem Laplaceschen Ansatz des bestimmten Integrales:

$$Z = \int_a^b e^{tz} T dt \quad (13)$$

wird man auf komplexe Integrationen geführt. Es handelt sich aber hier um die Frage nach der Grössenordnung der Schwingungsperiode. Denn die Ungewissheit darüber, wie stark das Fundament mitschwingt, verbietet ihre genaue Berechnung.

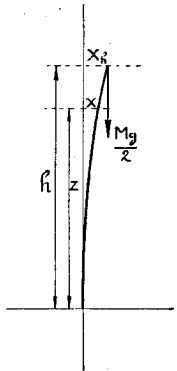


Fig. 9.

Wir wollen deshalb vereinfachende Annahmen machen, um uns darüber zu orientieren.

Wir werden von jeder Veränderlichkeit des Querschnittes des Betonpfeilers mit der Höhe absehen und diesen somit als prismatischen eingespannten Stab betrachten. Bei dieser Vereinfachung der Aufgabe können wir aber leicht den Einfluss des vertikalen Druckes der Masse auf den Pfeiler mit berücksichtigen. Es werde aber wiederum von jedem Trägheitswiderstande gegen Drehung abgesehen, was erlaubt sein dürfte, weiter wollen wir den Druck der Masse in erster Annäherung als konstante, vertikal gerichtete Kraft = $\frac{Mg}{2}$ für jeden Pfeiler rechnen, was bei dem geringen Einfluss, welchen diese Kraft auf die Schwingungsart ausübt, ebenfalls gestattet sein wird.

Es sei F der Stabquerschnitt, I sein axiales Trägheitsmoment. Wenn wir das Biegemoment, welches von den Trägheitskräften aller Stabelemente im Punkte z des Stabes ausgeübt wird, M_1 nennen und die übrigen Bezeichnungen beibehalten, dürfen wir schreiben:

$$S = \frac{\partial M_1}{\partial z} \quad (14)$$

Nach dem d'Alembertschen Prinzip ist jetzt

$$M_1 + \frac{1}{2} Mg (x_k - x) = IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (15)$$

wo x_k die Ablenkung des Stabendes darstellt. Wir erhalten nunmehr, weil I eine Konstante ist:

$$\frac{\partial M_1}{\partial z} = IE \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} + \frac{1}{2} Mg \frac{\partial x}{\partial z} \quad (16)$$

Es ist aber immer:

$$\frac{\partial S}{\partial z} + \rho F \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

und daher:

$$IE \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \frac{1}{2} Mg \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \rho F \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

Mit dem Ansatz (6) und der Beziehung $I = k^2 F$ erhalten wir jetzt:

$$\frac{k^2 \frac{\partial^4 Z}{\partial z^4} + \frac{1}{2} \frac{Mg}{a^2 \rho F} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}{Z} = - \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}}{U} \quad (19)$$

Wir folgern wiederum, dass die beiden Brüche gleich einer und derselben positiven Konstanten sein müssen, sagen wir λ^2 . Es ist also:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + a^2 \lambda^2 U = 0 \quad (20)$$

oder

$$U = A_1 \cos(a\lambda t) + A_2 \sin(a\lambda t) \quad (21)$$

und es bleibt die Lösung der Gleichung

$$k^2 \frac{d^4 Z}{dz^4} + \frac{1}{2} \frac{Mg}{a^2 \rho F} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0 \quad (22)$$

durchzuführen. Die Lösung bietet sich in der Form:

$$Z = Z_0 e^{pz} \quad (23)$$

wo p eine der vier Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$k^2 p^4 + \frac{Mg}{2a^2 \rho F} p^2 - \lambda^2 = 0 \quad (24)$$

ist. Wir finden:

$$Z = Z_0 e^{p_1 z} + Z_1 e^{-p_1 z} + Z_2 \cos p_2 z + Z_3 \sin p_2 z \quad (25)$$

wo

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{Mg}{2\alpha^2 \rho F} + \frac{M^2 g^2}{4\alpha^4 \rho^2 F^2} + 4k^2 \lambda^2}} \cdot \dots \cdot (26)$$

Zur Bestimmung der vier Integrationskonstanten ergibt sich aus der Einspannung bei $z = 0$:

$$\left[Z \right]_{z=0} = 0 \quad \left[\frac{dZ}{dz} \right]_{z=0} = 0 \cdot \dots \cdot (27)$$

Ferner sind Biegemoment und Schubkraft am Stabende gleich Null, woraus folgt:

$$\left[\frac{d^2 Z}{dz^2} \right]_{z=h} = 0 \quad I E \left[\frac{d^3 Z}{dz^3} \right]_{z=h} + \frac{1}{2} M g \left[\frac{dZ}{dz} \right]_{z=h} = 0 \cdot \dots \cdot (28)$$

Freilich handelt es sich in Wirklichkeit nicht um freibewegliche Stabenden, sondern um einen Rahmenverband. Erstens ist aber die Verbindung der Betonpfeiler mit dem Tragbalken nicht dermaassen starr, dass man nicht mit annähernd freien Stabenden rechnen könnte, zweitens wird die Schwingungsdauer des Gestelles durch diese Verbindung weiter herabgedrückt, also ungefährlicher.

Wenn wir weiter die Konstante

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{Mg}{IE} \cdot \dots \cdot (29)$$

einführen, erhalten wir die Gleichung zur Bestimmung der Periode der Schwingung oder des λ in der Form der Determinante:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ p_1 & -p_1 & 0 & p_2 \\ p_1^2 e^{p_1 h} & p_1^2 e^{-p_1 h} & -p_2^2 \cos p_2 h & -p_2^2 \sin p_2 h \\ (p_1^3 + p_1 \alpha) e^{p_1 h} & -(p_1^3 + p_1 \alpha) e^{-p_1 h} & (p_2^3 - p_2 \alpha) \sin p_2 h & -(p_2^3 - p_2 \alpha) \cos p_2 h \end{vmatrix} \cdot \dots \cdot (30)$$

wobei wir bemerken, dass wir anstatt (26) auch schreiben können:

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{4\lambda^2}{k^2}} \cdot \dots \cdot (31)$$

oder auch:

$$p_2^2 - p_1^2 = \alpha \quad p_1 p_2 = \frac{2\lambda}{k} \cdot \dots \cdot (32)$$

Damit reduziert sich die Gleichung (30) nach entsprechenden Umformungen der Determinante auf:

$$2 \lambda k \alpha \operatorname{Sh}(p_1 h) \sin(p_1 h) - (\alpha^2 k^2 + 8 \lambda^2) \operatorname{Ch}(p_2 h) \cos(p_2 h) = 8 \lambda^2 \cdot \dots \cdot (33)$$

Aus dieser Gleichung ist λ für jedes beliebige α (etwa graphisch) zu bestimmen. In unsrem Falle wird sich der Einfluss des α oder des vertikalen Druckes der Masse als sehr unwesentlich erweisen, und wir werden ohne Schwierigkeit die Periode der Grundschwingung mit vollständig genügender Annäherung ermitteln können.¹⁾

XI. Numerische Angaben.

Wir wählen als Grundeinheiten Kg, cm und Sek.

Für das Pendel ist:	$l = 285 \text{ cm}$	$M = 20\,600 \text{ Kg.}$
	$h = 185 \text{ „}$	$\Theta = 88\,000\,000 \text{ Kg cm}^2.$
	$a = 80 \text{ „}$	$f = 11,5 \text{ cm.}$
	$b = 10 \text{ „}$	$I = 20 \text{ cm}^4$
		$E = 2.10^6 \text{ Kg cm}^{-2}.$

¹⁾ An dieser Stelle soll nur darauf hingewiesen werden, wie sich daraus leicht die maximal zulässige Belastung eines vertikalen Stabes berechnen lässt. Als Kriterium haben wir die Forderung:

$$\text{Schwingungsdauer} = \infty \text{ oder } \lambda = 0$$

Diese Forderung lässt sich ersetzen durch:

$$\cos(p_2 h) = 0 \text{ für } \lambda = 0$$

Im vorliegenden Falle ist aber $p_2 = \sqrt{\alpha}$ und wir hätten das Kriterium:

$$h \sqrt{\alpha} = \frac{\pi}{2}$$

d.h.

$$h \sqrt{\frac{\frac{1}{2} M g}{I E}} = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{1}{2} M g = \frac{\pi^2 I E}{h^2}$$

die bekannte Euler'sche Knickformel.

Verlängerung der Tragfedern bei 5000 Kg Belastung:

11.04 11.20 11.29 11.39 cm.

Für das Gestell ist: $l_1 = 240$ cm $b_1 = 80$ cm $h = 410$ cm

$l_2 = 100$ „ $b_2 = 40$ „ $E = 500000$ Kg/cm².

XII. Verwertung der numerischen Angaben für die Horizontalschwingung und die Schaukelung.

(a) Die Tragstange sei in O frei beweglich.

Die beiden gekoppelten Bewegungsgleichungen, welche in diesem Falle gelten, werden:

$$\begin{cases} x - 88,4 \varphi + 0,39 x'' = 0 \\ -x + 470 \varphi + 18,7 \varphi'' = 0 \end{cases} \quad \dots \dots \dots (1)$$

oder symbolisch:

$$\begin{cases} -88,4 \varphi + (1 + 0,39 D^2) x = 0 \\ (470 + 18,7 D^2) \varphi - x = 0 \end{cases} \quad \dots \dots \dots (2)$$

Die Elimination ergibt für beide Variablen die Gleichung:

$$[7,3 D^4 + 202 D^2 + 382] \begin{matrix} \varphi \\ x \end{matrix} = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

aus welcher sich die superponierten Frequenzen entwickeln lassen:

und

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{202 + \sqrt{202^2 - 4 \cdot 7,3 \cdot 382}}{14,6}} = 5,24 \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{202 - \sqrt{202^2 - 4 \cdot 7,3 \cdot 382}}{14,6}} = 1,43 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Es sollten sich in den Registrierungen des Instrumentes also die beiden Perioden

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} = 1,20 \text{ Sek.} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\omega_2} = 4,39 \text{ „} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

vorfinden.

(b) Die Tragstange sei in O eingespannt.

Die beiden gekoppelten Bewegungsgleichungen, welche in diesem Falle gelten, werden:

$$\begin{cases} x - 87,2 \varphi + 0,345 x'' = 0 \\ -x + 426 \varphi + 16,9 \varphi'' = 0 \end{cases} \quad \dots \dots \dots (6)$$

oder symbolisch:

$$\begin{cases} -87,2 \varphi + (1 + 0,345 D^2) x = 0 \\ (426 + 16,9 D^2) \varphi - x = 0 \end{cases} \quad \dots \dots \dots (7)$$

Die Elimination ergibt für beide Variablen die Gleichung:

$$[5,82 D^4 + 164 D^2 + 339] \begin{matrix} \varphi \\ x \end{matrix} = 0 \quad \dots \dots \dots (8)$$

aus welcher sich die superponierten Frequenzen entwickeln lassen:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{164 + \sqrt{164^2 - 4 \cdot 5,82 \cdot 339}}{11,6}} = 5,10 \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{164 - \sqrt{164^2 - 4 \cdot 5,82 \cdot 339}}{11,6}} = 1,50 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (9)$$

Es sollten sich in den Registrierungen des Instrumentes also die beiden Perioden

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} = 1,23 \text{ Sek.} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\omega_2} = 4,18 \text{ „} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (10)$$

vorfinden.

(c) Vergleichende Betrachtungen.

Wenn man sich das Pendel des Seismographen starr denkt, findet man als äquivalente Pendellänge 496 cm. Es hätte somit eine Periode von 4,47 Sek. Die Periode des mathematischen Pendels von der Länge $l + h = 470$ cm. wäre dagegen 4,35 Sek.

Wir haben deshalb folgende Zusammenstellung:

Das Pendel unelastisch	$T = 4.47$ Sek.
elastisch, Tragstange beweglich	4.39 „
mathematisch	4.35 „
elastisch, Tragstange eingespannt	4.18 „

Die Tragfedern verkürzen die Periode des Pendels um etwa 0.1 Sekunde. Uebrigens möge besonders darauf hingewiesen werden, wie unwichtig in Bezug auf die Länge der Periode die Art der oberen Befestigung des Pendels ist, um so mehr, als die Registriervorrichtung, wie wir später sehen werden, die Periode auf etwa 3 Sekunden herabdrückt. Die Art der Befestigung ist daher vollkommen gleichgültig.

(d) Die Amplitudenverhältnisse.

Interessanter ist die Frage, in welchem Verhältnisse die Amplituden der beiden Schwingungsarten zueinander stehen. Wir wollen die Rechnung auf Abschnitt (a) beziehen. Es ist klar, dass dabei nur ein untergeordneter Unterschied mit den Resultaten für (b) und mit dem wahren Sachverhalt überhaupt vorliegt. Wir wollen annehmen, dass die Masse einen horizontalen Anstoss mit der Anfangsgeschwindigkeit x_0' erhält. Das Beispiel zweier gekoppelter Bewegungsgleichungen, welches in Abschnitt V ausgearbeitet wurde, erlaubt uns sofort die Bewegungsgleichungen in beiden Freiheitsgraden niederzuschreiben. Man findet:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_2 \sin 5,24 t + \frac{x_0' - 5,24 X_2}{1,43} \sin 1,43 t \\ \varphi &= \Phi_2 \sin 5,21 t - \frac{5,24}{1,43} \Phi_2 \sin 1,43 t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Durch Einsetzen in die zweite der Gleichungen (6) ergeben sich die beiden Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} X_2 + 44 \Phi_2 &= 0 \\ 3,67 X_2 - 1580 \Phi_2 &= \frac{x_0'}{1,43} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Damit erhalten wir:

$$X_2 = \frac{x_0'}{56,5} \text{ und } \Phi_2 = - \frac{x_0'}{2490} \dots \dots \dots (13)$$

d.h.:

$$x = \frac{x_0'}{56,5} \sin 5,24 t + \frac{x_0'}{1,48} \sin 1,43 t \dots \dots \dots (14)$$

und

$$\varphi = - \frac{x_0'}{2490} \sin 5,24 t + \frac{x_0'}{680} \sin 1,43 t \dots \dots \dots (15)$$

In der Aufzeichnung der Horizontalkomponente werden wir also die beiden Schwingungsarten vertreten finden mit Amplituden, welche in dem Verhältnisse

$$\frac{1,48}{56,5} = \frac{1}{38} \dots \dots \dots (16)$$

stehen.

Dies bezieht sich auf die Eigenschwingungen des Apparates. Wenn aber die Horizontalschwingung erzwungen ist, können ganz andere Erscheinungen eintreten, theoretisch bis zum Grenzfalle der Resonanz. Nun glaube ich aber, dass wir Resonanzerscheinungen aus praktischen Gründen nicht sehr zu befürchten haben. Es treten nur hie und da in der Maximalphase eines Bebens Wellen auf, welche einigermaassen reinen Sinuscharakter tragen, und wenn solche auftreten, liegt ihre Periode meistens weit oberhalb der Resonanzperiode, welche in unserm Falle etwa eine Sekunde beträgt. In den übrigen Phasen, wo Perioden von einer solchen Grössenordnung häufig sind, besteht dagegen meistens eine derartige Inhomogenität der Schwingung, dass die Resonanz wiederum nie zu grosser Bedeutung gelangen kann.

Wo übrigens die Schaukelung sich bei erzwungener, inhomogener Horizontalschwingung ungefähr in gleichem Maasse wie bei der Stosserregung bemerkbar machen dürfte, fühlen wir uns zu folgendem Schlusse berechtigt:

Es ist jede Horizontalschwingung von einer Nebenschwingung überlagert, welche wesentlich den Takt der Schaukelbewegung und etwa 3% der Amplitude der Primärschwingung besitzt. Wenn eine Folge von Sinuswellen eintritt, deren Periode sich der Nebenschwingungsperiode nähert, ist ein bedeutender Resonanzeffekt möglich. Dies ist aber praktisch auch in Annäherung kaum zu befürchten.

XIII. Verwertung der numerischen Angaben für die Vertikalschwingung und die Schaukelung.

Um ein ebenes Problem zu erhalten, haben wir die diesbezüglichen Bewegungsverhältnisse abgeleitet für den Fall, dass nur zwei Tragfedern da sind. Nun sei zuerst der ungünstigste Fall in Betracht gezogen, dass nämlich diese beiden Federn die zwei Extremalwerte unter den Federkonstanten der wirklich ausgeführten Federn besitzen. Es seien daher:

$$f_1 = \frac{10000 \cdot 981}{11.04} = 889\,000 \quad f_2 = \frac{10000 \cdot 981}{11.39} = 861\,000 \quad \dots \quad (1)$$

und also:

$$f_1 + f_2 = 1\,750\,000 \quad f_1 - f_2 = 28\,000 \quad \dots \quad (2)$$

Damit erhalten wir:

$$p = 52,1 \cdot 10^{14} \quad q = 21,7 \cdot 10^{13} \quad r = 1,81 \cdot 10^{12} \quad \dots \quad (3)$$

oder für die beiden überlagerten Schwingungsfrequenzen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2r}} \quad \dots \quad (4)$$

$$\omega_1 = 9,30 \quad \omega_2 = 5,77 \quad \dots \quad (5)$$

Es müssen sich also in den Aufzeichnungen die beiden Perioden

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,68 \text{ Sek} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 1,09 \text{ Sek} \quad \dots \quad (6)$$

vorfinden.

Die erstere ist sehr wenig verschieden von der Periode der reinen Vertikalschwingung:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{s}{g}} = 0,68 \text{ Sek} \quad \dots \quad (7)$$

Die darüber gelagerte Schwingung ist eine Schaukelungserscheinung, die von der Ungleichheit der Federkonstanten herrührt.

Interessant ist in erster Linie das Amplitudenverhältnis der beiden Schwingungen. Wir denken uns, dass zur Zeit $t = 0$ der Masse ein vertikaler Stoss mit der Anfangsgeschwindigkeit z'_0 erteilt wird und ziehen die Formeln (16) von Abschnitt VI zur Berechnung heran. Man findet jetzt:

$$Z_2 = \frac{z'_0}{9,6} \quad \Phi_2 = \frac{z'_0}{89} \quad \dots \quad (8)$$

weiter aus (40):

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{z'_0}{9,6} \sin 9,30 t + \frac{z'_0}{297} \sin 5,77 t \\ \varphi &= \frac{z'_0}{89,5} \sin 9,30 t - \frac{z'_0}{55,6} \sin 5,77 t \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (9)$$

In der Aufzeichnung der Vertikalkomponente würden wir also die beiden Schwingungsarten vertreten finden mit Amplituden, welche in dem Verhältnis

$$\frac{2,60}{297} = \frac{1}{31} \quad \dots \quad (10)$$

stehen. Dieser extreme Fall ist aber nicht realisiert, weil wir auf beiden Seiten zwei Federn haben, von deren Konstanten wir etwa den Mittelwert in Rechnung bringen müssen. Ferner würde man durch Vertauschung der Federn untereinander den Einfluss der Verschiedenheit ihrer Konstanten sicher so weit verringern können, dass wir uns zu folgendem Schlusse berechtigt fühlen:

Es ist jede Vertikalschwingung von einer Nebenschwingung überlagert, welche wesentlich den Takt der Schaukelbewegung und etwa 1% der Amplitude der Primärschwingung besitzt. Wenn eine Folge von Sinuswellen eintritt, deren Periode sich der Nebenschwingungsperiode nähert, ist ein bedeutender Resonanzeffekt möglich. Dies ist aber praktisch auch in Annäherung kaum zu befürchten.

Obschon man von einer selbständigen Schaukelungsperiode genau genommen nicht reden kann, rührt die Tatsache, dass wir hier eine kürzere Schaukelungsperiode finden, als im vorhergehenden Abschnitte, hauptsächlich davon

wenn a die Amplitude der Bodenbewegung, T ihre Periode bedeutet. Eine solche Beschleunigung ergibt eine Verschiebung ξ des Tragbalkens und somit des Aufhängepunktes des Pendels von der Grösse:

$$\xi = \frac{Pl^3}{8IE} \cdot \frac{4\pi^2 a}{T^2} \cdot \dots \dots \dots (14)$$

wo P das Gewicht eines Pfeilers bedeutet. Dieses Gewicht beträgt etwa 10000 Kg, also wäre:

$$\xi = \frac{1}{400} \frac{a}{T^2} \cdot \dots \dots \dots (15)$$

im Falle $T = 0,2$ also:

$$\xi = 0,06 a \cdot \dots \dots \dots (16)$$

eine nicht zu vernachlässigende Korrektur. Für normale Perioden verschwindet sie aber.

XV. Das Schema der Registriervorrichtung.

Die Nord-Süd, die Ost-West und die Vertikalkomponente der Bewegungen des Schwerpunktes der Masse relativ zur Erde werden von drei Stossstangen vom Zentrum des Eisenklotzes aus auf Hebelsysteme übertragen. Wie in dem kleinen Referate, welches Prof. de Quervain und Prof. Piccard der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft vorlegten¹⁾, schon ausgeführt ist, wurden die Hebelsysteme auf Starrheit, Trägheitsmoment und Beschleunigung so durchgerechnet, dass bei grösster zulässiger Amplitude und kleinster vorkommender Periode der Erdbebenwellen die Deformation nicht mehr als 1% der aufgeschriebenen Amplituden ausmacht. Diese Vorschrift führte auf 10 Kg. schwere massive Stossstangen. Alle Drehpunkte der Hebelsysteme sind womöglich mit Lamellen versehen; und da die Lamellen an beiden Enden der Stossstangen zu schwach sind, um auch die schwere Last der Stangen zu tragen, mussten diese letzteren mit besonderen Tragfedern ausgerüstet werden. Diese Tragfedern sind an der Peripherie der Masse befestigt. Figur 10 zeigt einen Schnitt durch eine dieser Anordnungen. Eine unangenehme, unvorhergesehene, Eigenschaft dieser Tragfedern wird uns noch später zu beschäftigen haben. Die Hebelsysteme bewirken eine 1500 fache Vergrösserung. Die letzte Stossstange aller Systeme, welche die Schreibfeder bewegt, musste auf beiden Seiten mit Spitzenlagerung versehen werden. Damit aber die

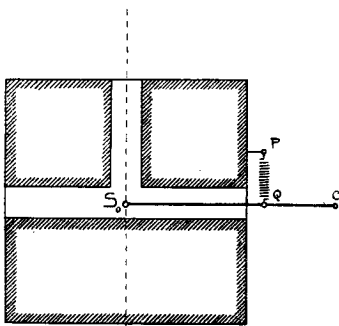


Fig. 10.

Schreibstifte auch bei stärkster Beschleunigung die Bewegungen des Systems mitmachen, wurden „Gegenfedern“ angeordnet, welche die Spitzen in die Schalen pressen. Eine schematische Zeichnung dieser Registriervorrichtung möge hier beigelegt werden (Figur 11). Zwischen den beiden nicht-verbundenen Drehpunkten muss man sich ein Hebelsystem mit 100 facher Uebersetzung hinein konstruiert denken (ü).

Die Gegenfedern sind nicht so angeordnet, wie in der Zeichnung deulichkeitshalber ausgeführt wurde. Sie werden tordiert statt gestreckt. Ein prinzipieller Unterschied liegt aber nicht vor. Der Einfluss dieser Gegenfedern ist ganz bedeutend, und wir werden daher diesen Einfluss in den folgenden Abschnitten zu betrachten haben.

Die drei Schreibfedern schreiben auf einem und demselben Russbogen, zur Vermeidung aller relativer Zeitfehler. Die Dämpfung ist magnetisch und wird auf das vielgebrauchte Amplitudenverhältnis 1 : 5 eingestellt.

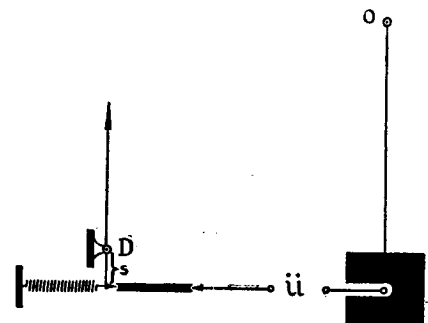


Fig. 11.

XVI. Der Einfluss der Gegenfedern auf die verschiedenen Perioden.

Die Periode der Horizontalschwingungen des Apparates, wie er im Betriebe ist, bleibt sehr wesentlich unter der Periode, welche nach Abschnitt XII zu erwarten wäre, wo wir annahmen, dass das Pendel an keine Registriervorrichtung gekoppelt ist. Zu allererst wird die Periode um einen kleinen Betrag verlängert, weil bei der Pendelung alle Hebel der Registriervorrichtung beschleunigt werden müssen (Wiechert'sches Prinzip). Aber viel wesentlicher ist in diesem Falle der Einfluss der Kräfte, welche die Gegenfedern durch die Uebersetzung auf das System ausüben. Die Richtkraft der Schwere wird durch diejenige der Federn bedeutend vermehrt.

Die Kraft K dieser Gegenfedern, welche in dem Ruhezustande der Masse im jetzigen Betriebe ungefähr 5 Gramm beträgt, drängt die Masse etwas aus der Lotlinie durch den Aufhängepunkt. Diese Abweichung bleibt aber von der Grössenordnung eines Zehntel Millimeters und hat daher keine weitere Bedeutung.

¹⁾ Verhandlungen der Schweizer. Naturforschenden Gesellschaft. Bern 1922 II Seite 186-187.

Die Betriebsperiode des Apparates hängt übrigens nicht von der Federkraft der Gegenfedern ab, welche sich nach Willkür ändern lässt, sondern nur von der Federkonstanten und ist somit immerhin eine instrumentelle Konstante, welche aber für die beiden Horizontalkomponenten um einige Prozente verschiedene Werte aufweist. Dies ist mit Rücksicht auf die Bestimmungen absoluter Amplituden, über welche wir später noch sprechen werden, sehr zu beachten.

Wenn wir mit

l die Pendellänge

u die Übersetzung

bis zum Angriffspunkte der Gegenfedern;

f die Federkonstante

bezeichnen, findet man leicht für die Horizontalperiode des Apparates:

$$T_h = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{fu^2 l}{M}}} \dots \dots \dots (1)$$

Wo die Beobachtungen eine Horizontalperiode von rund 3 Sekunden zeigen, und ohne Registriervorrichtung diese Periode, wie wir sahen, rund 4.2 Sekunden oder $\sqrt{2}$ mal grösser sein sollte, ist unter dem Einflusse der Gegenfedern die äquivalente Pendellänge auf die Hälfte reduziert. Dies war bei der Konstruktion vorgesehen.

Man sieht also zur Genüge, von wie geringer Bedeutung die Art der Aufhängung des Pendels war.

Je geringer die Pendellänge l , um so geringer der Einfluss der Gegenfedern auf die Periode. Daher ist klar, dass die Vertikalperiode des Apparates, welche einem sehr geringen Werte für l entspricht, kaum von der Gegenfeder (welche für diese Komponente identisch wie für die beiden Horizontalkomponenten ausgeführt wurde) beeinflusst wird.

XVII. Der Einfluss der Gegenfedern auf die Torsionsschwingung.

Wir wollen jetzt einem Umstande Rechnung tragen, durch welchen vielleicht bei der Horizontalschwingung auch die Torsion in bedeutendem Maasse angeregt werden könnte. Wir betrachteten schon die Möglichkeit, dass der Schwerpunkt sich nicht genau senkrecht unter den Aufhängepunkt einstellt. Viel bedeutender könnte aber der Umstand werden, dass der wahre und der berechnete Schwerpunkt der Masse nicht zusammenfallen und der Befestigungspunkt der Stossstangen, welche die Registrierung vermitteln, eine Excentricität aufweist. Gerade bei dem grossen Einflusse, welchen die Gegenfedern haben, wäre zu erwarten, dass eine solche Excentricität zu ganz bedeutenden Drehmomenten führen könnte. Der Angriffspunkt der Stossstangen sei A und liege in einem Abstände e vom Schwerpunkte S_0 . Es soll in der Ruhelage die Strecke AS_0 einen Winkel φ mit der x Achse durch den Schwerpunkt einschliessen. Bei einer Ablenkung der Masse, wobei der Schwerpunkt nach S'_0 , der Punkt A nach A' gekommen ist, soll dieser Winkel ψ sein.

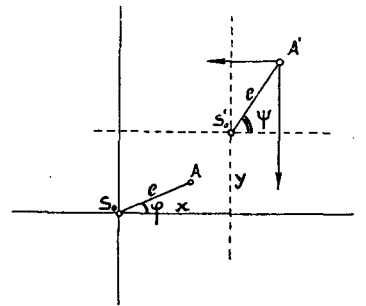


Fig. 12.

Die Bewegungsgleichungen für die Horizontalkomponenten und die Torsion erhalten daher die Form:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 x + \mu_1 (x + e \cos \psi - e \cos \varphi) + M x'' &= 0 \\ \lambda_2 y + \mu_2 (y + e \sin \psi - e \sin \varphi) + M y'' &= 0 \\ -\mu_1 (x + e \cos \psi - e \cos \varphi) e \sin \psi + \\ + \mu_2 (y + e \sin \psi - e \sin \varphi) e \cos \psi + \Theta_t \psi'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Wenn wir schreiben:

$$\psi = \varphi + \chi \dots \dots \dots (2)$$

und berücksichtigen, dass χ immer sehr klein bleibt, erhalten wir die simultanen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_1 + \mu_1) x - \mu_1 e \chi \sin \varphi + M x'' &= 0 \\ (\lambda_2 + \mu_2) y + \mu_2 e \chi \cos \varphi + M y'' &= 0 \\ -\mu_1 x e \sin \varphi + \mu_2 y e \cos \varphi + \\ + [\mu_1 e^2 \sin \varphi + \mu_2 e^2 \cos \varphi + \lambda_3] \chi + \Theta_t \chi'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Wenn wir zur leichteren Behandlung einen Koordinatenwechsel vornehmen, bei dem etwa φ zu Null wird, können wir uns beschränken auf das Paar:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_2 + \mu_2) y + \mu_2 e \chi + M y'' &= 0 \\ \mu_2 e y + (\mu_2 e^2 + \lambda_3) \chi + \Theta_t \chi'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Wir wollen diese Gleichungen schreiben in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 y + \frac{\mu_2 e}{M} \chi + y'' &= 0 \\ \frac{\mu_2 e}{\Theta_t} y + \left(\frac{\mu_2 e^2}{\Theta_t} + \omega_2^2 \right) \chi + \chi'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

und da diese in die allgemein behandelte Kategorie hineinfallen, können wir uns erlauben, die Lösung dieses Paares sofort hinzuschreiben. Es genügt Folgendes:

Es sind

$$\omega_1' = \sqrt{\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\mu_2 e^2}{\Theta_t} \right) \pm \sqrt{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \frac{\mu_2 e^2}{\Theta_t} \right)^2 + 4 \frac{\mu_2^2 e^2}{\Theta_t M}}} \dots \dots \dots (6)$$

die beiden auftretenden Frequenzen, und es ist

$$\frac{\mu_2 e \omega_1'}{M (\omega_2'^2 - \omega_1'^2) \omega_2' y_0'} \left(\chi_0' - \frac{\mu_2 e y_0'}{\Theta_t (\omega_1^2 - \omega_2^2) - \mu_2 e^2} \right) \dots \dots \dots (7)$$

das Amplitudenverhältnis, welches man zwischen den superponierten Schwingungen in den Horizontalaufzeichnungen vorfindet. Dabei wurde vorausgesetzt, dass e klein und ω_2 sehr verschieden von ω_1 sei. Es trifft dies in unserm Falle zu. Es sind weiter χ_0' die zur Zeit $t = 0$ bestehende Winkelgeschwindigkeit der Masse um die z Achse und y_0' die entsprechende anfängliche Horizontalgeschwindigkeit.

War die Torsionsschwingung ursprünglich nicht angeregt, also $\chi_0' = 0$ so reduziert sich (7) auf:

$$- \frac{\mu_2^2 e^2 \omega_1'}{M (\omega_2'^2 - \omega_1'^2) \omega_2' \{ \Theta_t (\omega_1^2 - \omega_2^2) - \mu_2 e^2 \}} \dots \dots \dots (8)$$

einen Bruch, dessen Wert mit e^2 abnimmt. Ist e sehr klein, so kann die Torsionsschwingung also sicher vernachlässigt werden. Bei Erdbeben würde keine Torsionsschwingung im Seismogramm nachweisbar sein. Interessant ist, dass es einen Wert gibt:

$$\chi_0' = \frac{\mu_2 e}{\Theta_t (\omega_1^2 - \omega_2^2) - \mu_2 e^2} y_0' \dots \dots \dots (9)$$

wobei die Torsionsamplitude im Horizontalseismogramm überhaupt verschwindet. Ist aber χ_0' gross, also die Torsionsschwingung zur Zeit $t = 0$ schon kräftig angeregt, dann reduziert sich (7) unter Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung auf:

$$\frac{\mu e \omega_1' \chi_0'}{M (\omega_2'^2 - \omega_1'^2) \omega_2' y_0'} \dots \dots \dots (10)$$

Man kann diese Verhältnisse durch die Versuche prüfen. Im Abschnitt XIX wird aber gezeigt werden, dass sie zu absurden Werten der Excentricität e führen. Wir sind daher gezwungen nach einer andren Ursache zu suchen, welche bewirkt, dass sich die Torsionsschwingungen bei den Versuchen überraschend stark aufzeichnen.

XVIII. Die Gegenfedern und die maximale Bodenbeschleunigung.

Wenn wir (Figur 11) mit θ das Massenträgheitsmoment einer Schreibfeder in Bezug auf die Drehachse D und mit m die Masse der letzten, einzigen auf Spitzen gelagerten Stossstange bezeichnen und x_m'' die maximale Bodenbeschleunigung darstellt, mit welcher zu rechnen ist, dann haben wir, damit die Gegenfeder den angegebenen Dienst leistet, die Beziehung:

$$K = u x_m'' \left[\frac{\theta}{s^2} + m \right] \dots \dots \dots (1)$$

zur Bestimmung der notwendigen Federkraft. Die Federkraft muss nämlich, damit der Kontakt zwischen den registrierenden Teilen nicht verloren gehe, zweierlei leisten. Sie muss die Schreibfeder drehen und die letzte Stossstange verschieben, entsprechend der maximalen Bodenbeschleunigung.

Die Gegenfeder wird aber, wie schon bemerkt wurde, nicht gedrückt, sondern tordiert. Der mittlere Radius der Spirale sei r , in der Ausführung also gleich s , die Drahtdicke d , die Drahtlänge l_0 . Wenn es darauf ankommt, den Einfluss der Gegenfedern auf die Schwingungsperiode soviel wie möglich zu beschränken, werden wir der Feder die höchste zulässige Beanspruchung geben. Es ist dann:

$$f = \frac{\pi E d^4}{64 s^2 l_0} \quad K = \frac{\pi d^3}{32 s} \cdot k_b \dots \dots \dots (2)$$

wenn k_b die höchste zulässige Bieungsbeanspruchung des Federmaterials darstellt.

Gleichung (1) des Abschnittes XVI wird daher unter Berücksichtigung dieser Formeln:

$$T_h = \sqrt{\frac{l}{g + x'' \frac{u^3 E l}{2 M s k_b} \left(\frac{\theta}{s^2} + m \right) \frac{d}{l_0}}} \dots \dots \dots (3)$$

Wenn die maximale Bodenbeschleunigung gegeben ist und die letzte Schubstange und die Schreibfeder entsprechend dimensioniert sind (Abschnitt XV), haben wir daher nur noch eine gewisse Freiheit in der Dimensionierung der Gegenfeder. Wenn wir die Periode der Horizontalschwingung möglichst gross haben wollen, muss:

$$\frac{d}{l_0} \dots \dots \dots (4)$$

das Verhältnis der Drahtdicke zur Drahtlänge so klein wie möglich gewählt werden. Die Reduktion dieses Quotienten geht indessen praktisch nur bis zu einer gewissen Grenze. Wir müssen also unter allen Umständen mit einer Verkürzung der Horizontalperiode rechnen. *Wo von Anfang an eine Periode von 3 Sekunden als vorteilhaft mit Rücksicht auf den Zweck des Apparates betrachtet wurde, war man auch bei der angenommenen reichlich hohen maximalen Bodenbeschleunigung relativ frei in der Wahl der Feder.*

XIX. Versuche und Schlussfolgerungen.

Eine Reihe Versuche wurde unternommen, um zu erfahren, wie die Aufzeichnungen bei verschiedener Art des Anstossens der Pendelmasse verlaufen. Es sei gestattet, die wichtigsten Resultate kurz hervorzuheben.

Wenn die Dämpfungsvorrichtung ausgeschaltet ist, zeigen sich keine zwei Komponenten absolut unabhängig von einander. Dies war bei dem komplizierten Instrumente zu erwarten und wird immer ein wesentlicher Uebelstand der Seismographen bleiben, bei welchen ein einziges Pendel mehr als eine Komponente der Erdbewegung registrieren soll. *Die Versuche zeigen aber, dass eine gute Dämpfung die Horizontal- und Vertikalkomponenten praktisch vollkommen unabhängig macht.* Merkwürdig und wichtig war aber Folgendes:

Es zeigte sich, dass die Schaukelschwingungen und Torsionsschwingungen *bei künstlicher Erregung* sich mit Amplituden aufzeichneten, welche unter Umständen von der gleichen Grössenordnung wie die Amplituden der Horizontal- und Vertikalschwingung waren.

Die Torsionsperiode liegt in der Nähe von 5 Sekunden und die Schaukelungsperiode ist bei abwesender Astatisierung durchweg gleich einer Sekunde. Die Torsionsperiode stimmt sehr gut mit den theoretischen Erwartungen überein, die Schaukelungsperiode dagegen weniger. Dass diese Periode für alle Richtungen gleich sei, war von vornherein zu erwarten, aber man beachte, dass die Annahme absoluter Starrheit der Tragstange (Abschnitt XIII) eine Schaukelungsperiode (1.09 Sek.) liefert, die in besserer Uebereinstimmung mit der Beobachtung ist, als bei Annahme absoluter Flexibilität (Abschnitt XII, 1.23 Sek.). Daher ist es angezeigt jene erstere Annahme zu machen, wenn auch sogar bei dieser die Schaukelungsperiode noch zu hoch ausfällt. Denn auch sie entspricht nicht den wahren Verhältnissen. Richtiger wäre es vor allem auch, die Tragfedern in ihren Enden als eingespannt zu betrachten. Aber dann würde die Theorie unverhältnismässig komplizierter. Als erwiesen kann immerhin gelten, dass die auftretende Einsekundenschwingung von dem Schaukelungseffekt herrührt, und darauf kommt es an.

Wir haben früher gezeigt, dass die Schaukelschwingungen in nicht unbedeutendem Maasse mit den Horizontalschwingungen gekoppelt sind. Warum eine geringe Sekundärschwingung in der Horizontalbewegung bei den Versuchen zum Vorschein kommt, ist daher aufgeklärt. Man kann darüber ebenfalls quantitativ Rechenschaft geben aus den Horizontaldiagrammen bei absichtlicher Anregung der Schaukelung.

In ungünstigen Fällen hat man auch eine Koppelung zwischen der Vertikalschwingung und der Schaukelung anzunehmen. Aber durch diese Koppelung das Auftreten der Schaukelung im Vertikalseismogramm quantitativ zu erklären, erschien ausgeschlossen, auch erschien es durchaus unmöglich, mit Hilfe der bis jetzt betrachteten Koppelungen vom Auftreten der Torsionsschwingung im Horizontalseismogramm Rechenschaft zu geben.

Nur eine Excentricität des Angriffspunktes der Stossstangen von der Grössenordnung eines Dezimeters hätte zur Erklärung genügt.

Diese beiden Punkte erforderten daher ganz besondere Beachtung, denn es war ja die Hebelübersetzung so konstruiert worden, dass jede Aufzeichnung einer Schaukelung oder Torsion aus mechanischen Ursachen als ausgeschlossen gelten musste. Es wurde nun nach einem unauffälligen Konstruktionsfehler gesucht, und es zeigte sich, dass die Federn, welche die Stossstangen für die Horizontalkomponenten tragen und an der Masse befestigt sind, die Uebertragung der Schaukelungen und Torsionsschwingungen auf die Vertikalkomponente und die Horizontalkomponente bewirkten. Man betrachte die Figur 10:

a. Wenn eine Schaukelung auftritt, welche nicht gerade um eine Achse stattfindet, welche durch die

abgebildete Stossstange geht, wird die Tragfeder PE abwechselnd ihre Länge und damit ihre Zugkraft ändern. Den Punkt C kann man als festen Drehpunkt betrachten. Die Zusatzkraft wird also mit einer gewissen Uebersetzung (ungefähr 2 : 3) auf den Schwerpunkt S_0 übertragen und bewirkt damit eine Vertikalschwingung im Takt der Schaukelung.

b. Die Spiralfeder PQ ist mit etwa 10 Kg belastet. Wenn nun bei der Torsion der Punkt P sich über eine gewisse Strecke längs der Peripherie eines Kreises um die Vertikale durch S_0 bewegt hat, wirkt in Q eine kleine horizontale Komponente dieser Federkraft proportional jener Auslenkung. Diese Komponente wird ebenfalls im Verhältniss 2 : 3 auf den Schwerpunkt übertragen und bewirkt eine periodische Verschiebung der andern Stossstange im Takt der Torsionsschwingung.

Ueber die Grössenordnung der betrachteten Effekte ist folgendes zu sagen:

a. Die Masse sei um einen kleinen Winkel φ gedreht um eine Achse, welche der Einfachheit wegen durch eine der Stossstangen gelegt ist. Diese Verdrehung gibt in der skizzierten Weise Anlass zu einer im Schwerpunkt der Masse angreifenden vertikalen Kraft:

$$P_v = 58,5 \varphi \text{ Kg.}$$

Dieser Kraft entspricht, *statisch gerechnet*, eine Ablenkung des Schreibstiftes von der Grösse:

$$a_v = 50 \varphi \text{ cm.}$$

b. Die Masse sei um einen kleinen Winkel ψ gedreht um ihre vertikale Achse. Diese Verdrehung gibt Anlass zu zwei in den Richtungen der beiden horizontalen Stossstangen angreifenden Kräfte:

$$P_h = 24,0 \psi \text{ Kg.}$$

Diesen Kräften entsprechen, *statisch gerechnet*, Ablenkungen der Schreibstifte von der Grösse:

$$a_h = 450 \psi \text{ cm.}$$

Man sieht, dass diese Effekte bei künstlicher Erregung der Schaukelung bzw. der Torsionsschwingung von der ersten Ordnung sein können. Der erstere Effekt ist aber weitaus der kleinere, was durch die Versuche bestätigt wurde.

Damit dürften alle Koppelungen zwischen der Schaukelung und Torsionsschwingung einerseits und den übrigen Komponenten andererseits restlos erklärt sein.

Eine andere Frage ist freilich, in wie fern die Aufzeichnung einer Torsionsschwingung oder einer Schaukelung schädlich für die Interpretation der Seismogramme werden kann. Es können selbstverständlich weder die Torsionsschwingung noch die Schaukelung durch Erdbeben angeregt werden, bei denen nach den Versuchen Schlüters die torsionalen Effekte bekanntlich verschwindend klein sind gegenüber den Translationen. Die Schaukelung und die Torsionsschwingung treten immer nur als sekundäre Wirkungen auf. Versuch und Rechnung ergeben, dass sie als solche sehr gering bleiben.

Immerhin würde es sich vorsichtshalber empfehlen, eine kleine Verbesserung an dem Apparate anzubringen, und zwar in der Weise, dass man die Tragfedern der Stossstangen so weit wie möglich verlängert und oben an der Masse befestigt, wie in der Konstruktion vorgesehen war. Eine Befestigung ausserhalb der Masse ist nicht zu empfehlen, weil damit ein gefährlicher Kontakt mit der Erde gegeben wäre, welchen man beim Seismometer ja soviel wie nur möglich vermeiden will. Mit einer fünffachen Verlängerung der Tragfedern der Stossstangen würde man eine fünffache Abschwächung sowohl des Schaukelungs- wie des Torsionseffektes erzielen, und damit könnten diese Schwierigkeiten als erledigt gelten. *Es bleibt daher bei sorgfältiger Konstruktion nur der im Abschnitt XII besprochene störende Effekt bestehen. Alle Horizontalaufzeichnungen werden von einer geringen darübergelagerten Schaukelschwingung gefälscht.*

Bei fortwährender Nachprüfung der Unabhängigkeit der Komponenten, welche nach der Erfahrung durch unbeachtete störende Einflüsse leicht beeinträchtigt werden kann, wird man also den Aufzeichnungen des Züricher Seismographen innerhalb gewisser Grenzen Vertrauen schenken können, und zwar werden diese Grenzen sicher viel mehr von der postulierten mechanischen Registrierung, d. h. von der Reibung der Schreibstifte auf dem Russbogen, als von den Koppelungen zwischen den sechs Freiheitsgraden beeinflusst. Es ist darum sicher zu begrüssen, dass instrumentelle Einzelheiten für eine optische Registrierung vorgesehen wurden. Darauf werden wir noch zu sprechen kommen.

Wir müssen selbstverständlich schliessen, dass man dem System der getrennten Apparate den Vorzug geben muss. Bei dem vorliegenden Instrument konnte es sich aber nicht darum handeln, drei unabhängige Massen zu installieren, sondern nur darum, aus der einen, deren Aufhängung möglich war, den grösstmöglichen Nutzen zu ziehen. Es wird für die Bedürfnisse der praktischen Seismometrie durch die Registrierung von drei Komponenten statt nur einer so sehr viel mehr geleistet, dass im Verhältnis dazu die hier untersuchten Bedenken (die auch den Konstrukteuren grundsätzlich nicht unbekannt waren) zurücktreten.

Es hat sich insbesondere seither in der Praxis gezeigt, dass gerade die Registrierungen der Vertikalkomponente für die sichere Erkennung der *P*-Einsätze von Nahebeben und Fernbeben besonders wichtig sind.

In wie weit die Registrierungen dieses Instrumentes auch wertvoll sind zur Analyse der wahren Bodenbewegung, ist eine Frage, welche weiter unten behandelt werden soll.

Es sei an dieser Stelle an Folgendes erinnert:

Wir dürfen nicht vergessen, dass nach früherem eine direkte Resonanz der Schaukelung möglich ist, die sich auch in der Vertikalkomponente bemerkbar machen könnte. Resonanz mit der Torsionsschwingung dürfte, nach der geplanten Verbesserung, kaum als Störung in Betracht kommen. Der Einfluss der Schwingungen des Gerüsts ist bei normaler Periode der Erdbewegung gleichfalls zu vernachlässigen.

XX. Das Schema der Astatisierung.

Wir möchten hier nicht unterlassen, auch ein Wort über die Astatisierungsvorrichtung zu sagen, welche zur Vergrösserung der vertikalen Periode des Instrumentes konstruiert wurde.

Figur 13 gibt ein Bild der Vorrichtung, welche auf zwei Seiten des grossen Klotzes und zwar in paarweiser Ausführung angebracht wurde. Die Wirkung dieser Astatisierung wird durch diese Figur genügend erläutert.

Professor de Quervain hofft, dauernd eine vierfache Astatisierung, also eine Vertikalperiode von rund 2,5 Sekunden zu erreichen, bevor der Punkt der Instabilität überschritten wird.¹⁾ Die Einstellung ist eine sehr heikle Sache und erfordert grosse Geduld und auch genügend Zeit, denn die vollständige Astatisierung wird erst in Etappen erreicht werden können, weil das Instrument sich jedesmal den neuen Verhältnissen anpassen muss, und alle Temperaturdifferenzen ausgeglichen sein müssen, bevor wieder ein kleiner Schritt vorwärts getan werden kann.

Prof. de Quervain konnte bei der ersten groben Einstellung einen gewissen Resonanzeffekt wahrnehmen, welcher sehr wahrscheinlich mit einem theoretisch von mir begründeten identisch war. Es wirkt nämlich die Astatisierung auch auf die Schaukelung zurück und zwar in maximalem Grade in der Ebene, welche man durch die Vorrichtung legen kann. Senkrecht darauf ist die Astatisierung von keinem Einfluss auf die Schaukelung, und diese hat immer noch die Periode von rund 1 Sekunde. Wenn die Astatisierung der Vertikalperiode eine *n* fache ist und die Astatisierung der Schaukelung in der Ebene der Vorrichtung eine *m* fache, findet man mit Rücksicht auf die Konstruktion die Beziehung:

$$\frac{m^2 - 1}{m^2} = 0,78 \frac{n^2 - 1}{n^2} \dots \dots \dots (1)$$

Aus dieser Gleichung kann man ermitteln, dass die Periode der Vertikalschwingung mit der der Schaukelung in der Ebene der Vorrichtung identisch ist, wenn diese

$$1,7 \text{ Sekunden.} \dots \dots \dots (2)$$

beträgt. Wenn die Astatisierung wirksam ist, kann nur um zwei Achsen eine permanente Schaukelung existieren, nämlich um eine Achse, welche in der Ebene der Vorrichtung liegt und um eine Achse senkrecht darauf. Bei jeder anderen Schaukelung besitzt die Masse eine Lissajousbewegung, welche nach den beiden Grenzfrequenzen zerlegt werden kann. Beim Anspannen der Astatisierung sollte also theoretisch zweimal eine Resonanzerscheinung eintreten nämlich ein erstes Mal, wenn die Vertikalperiode auf eine Sekunde ein zweites Mal wenn sie auf 1,7 Sekunden angewachsen ist.

Ein geringer Resonanzeffekt wurde nach Mitteilung Professor de Quervains beim Anspannen der Astatisierung in der Tat ziemlich plötzlich wahrgenommen. Bei stärkerer Anspannung war der Effekt wieder verschwunden. Meiner Ansicht nach bezieht sich diese Wahrnehmung auf die erste Resonanz. Dass die zweite Resonanz nicht aufgefallen ist, liegt wohl daran, dass der zweiten Schwingung, wie Modellversuche lehrten, eine grosse mechanische Dämpfung anhaftet. Es tritt überhaupt die grössere der beiden Schaukelungsperioden wegen des schnellen Abklingens immer nur im ersten Moment in Erscheinung und ist kaum zu erfassen. Mit Rücksicht auf das Vorgehende sei also noch darauf hingewiesen, dass für die Schaukelung praktisch nur eine Resonanzstelle, nämlich $T_p = 1 \text{ Sek.}$ zu befürchten ist.

Bei vierfacher Astatisierung kommt nur $\frac{1}{16}$ der aufwärtstreibenden Federkraft zur Geltung. Legt man ein Gewicht auf die Masse, so wird diese sich 16 mal tiefer senken als ohne Astatisierung.

Auch wenn die Federn sich unter Temperatureinfluss um Δ verlängern, entsteht durch die Astatisierung

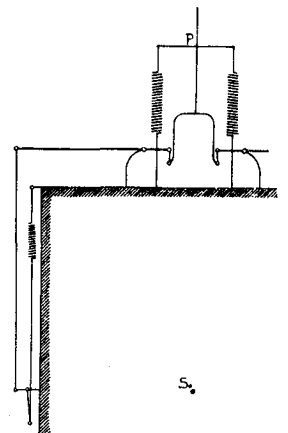


Fig. 13.

¹⁾ Inzwischen nahezu erreicht.

und finden damit für die allgemeine Lösung der Gleichung (7):

$$\begin{aligned} \varphi = & y e^{-\nu y} \left[\cos y \left\{ (1 - \nu^2) \frac{q}{r} + 2\nu \frac{p}{r} \right\} + \sin y \left\{ (1 - \nu^2) \frac{p}{r} - 2\nu \frac{q}{r} \right\} \right] + \\ & + 2 e^{-\nu y} \left[\cos y \left\{ (1 - \nu^2) \frac{Q}{R} + 2\nu \frac{P}{R} - \frac{p}{r} + \nu \frac{q}{r} \right\} + \right. \\ & \left. + \sin y \left\{ (1 - \nu^2) \frac{P}{R} - 2\nu \frac{Q}{R} + \frac{q}{r} + \nu \frac{p}{r} \right\} \right] \\ & + K e^{-\lambda y} \cos(y \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) + L e^{-\lambda y} \sin(y \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}). \end{aligned} \quad (11)$$

Die beiden willkürlichen Konstanten K und L findet man selbstverständlich aus den Bedingungen:

$$\left| \varphi \right|_{t=0} = 0 \quad \left| \varphi' \right|_{t=0} = 0 \quad (12)$$

Man kann nun für eine Reihe von Werten für μ und ν die Kurve (11) berechnen. Ich beschränkte mich auf die Werte

$$\begin{aligned} \mu = & 0 \quad 0,5 \quad 1 \quad 1,5 \quad 2 \\ \nu = & 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \end{aligned} \quad (13)$$

welche den ersten praktischen Anwendungen genügen dürften. Dass ich mit dem Verhältnis der Bebenperiode zur Eigenperiode des Instrumentes bis auf 2 gegangen bin, hat darin seinen Grund, dass die Eigenperiode des Seismographen, welchen wir hier im besondern studiert haben, sehr kurz ist im Vergleich zu der bei andern Instrumenten gebräuchlichen, nämlich nur 3 Sekunden beträgt, und Einsatzperioden von bedeutend grösserer Dauer, sogar bei der Phase der longitudinalen Wellen, vorkommen. Uebrigens habe ich die ganze Rechnung auch insoweit auf den Züricher Seismographen bezogen, als ich die Dämpfung 1 : 5 angenommen habe, welche Annahme auf

$$\lambda = 0,456 \mu. \quad (14)$$

führt. Da diese Art der Dämpfung weit verbreitet ist, werden die Resultate der Rechnung ihren Wert auch für andere Instrumente haben.

Es ist zu bemerken, dass die Rechnungen sich viel einfacher gestalten, wenn man sich auf die Dämpfung beschränken könnte, bei welcher der Apparat an der Grenze der Aperiodicität steht, wie dies bei den Galitzin-Apparaten der Fall ist.

Es ist dann:

$$\lambda = \mu \quad (15)$$

Die beigelegten Figuren 14 zeigen die Kurven, welche der Seismograph aufzeichnen wird, wenn ihn die Wellen treffen, welche durch die punktierten Linien, spiegelbildlich, dargestellt werden.

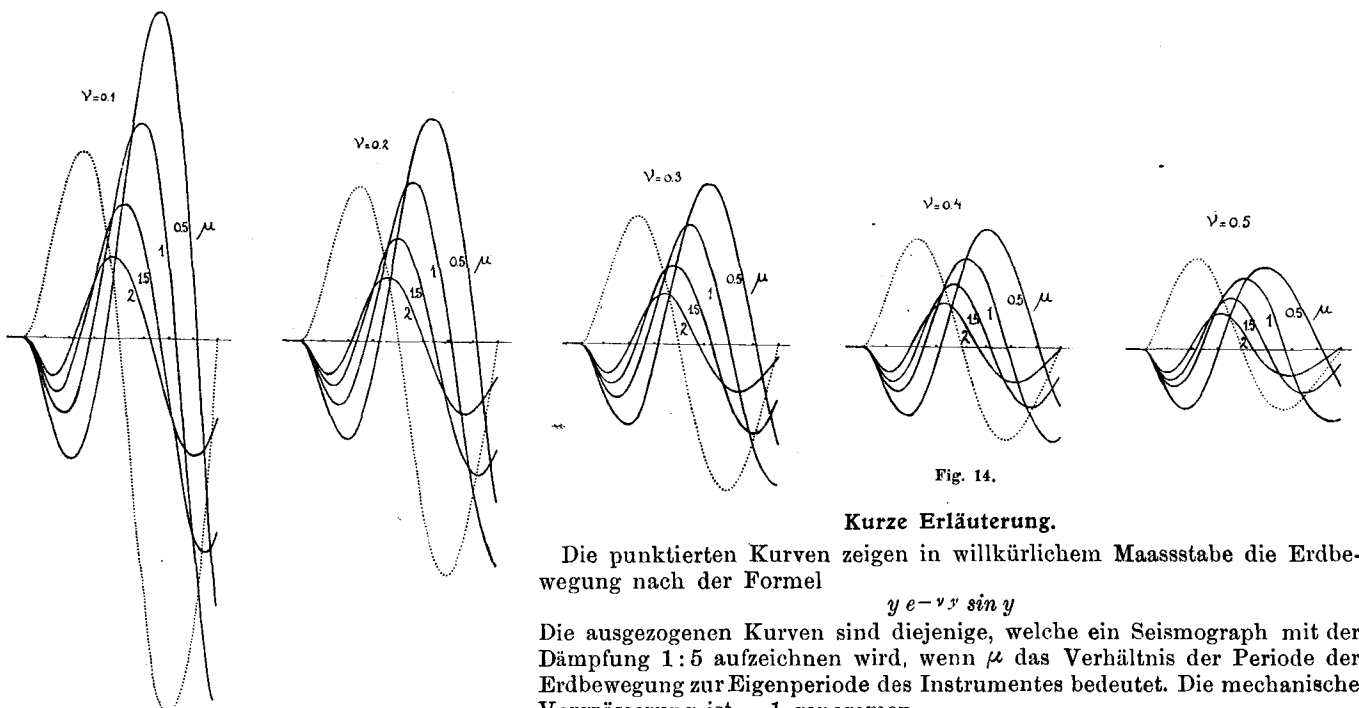


Fig. 14.

Kurze Erläuterung.

Die punktierten Kurven zeigen in willkürlichem Maassstabe die Erdbewegung nach der Formel

$$y e^{-\nu y} \sin y$$

Die ausgezogenen Kurven sind diejenige, welche ein Seismograph mit der Dämpfung 1 : 5 aufzeichnen wird, wenn μ das Verhältnis der Periode der Erdbewegung zur Eigenperiode des Instrumentes bedeutet. Die mechanische Vergrösserung ist = 1 genommen.

Wenn wir nun die Werte der ersten maximalen Amplituden der registrierten Kurven und die Phasenverschiebungen dieser Maxima gegenüber denjenigen der Kurven der Bodenbewegung berechnen, bekommen wir die graphische Darstellung Figur 15. Diese zeigt schon einen interessanten Charakter. Die Vergrößerungskurven V zeigen den Verlauf des Quotienten der ersten maximalen Amplitude des Seismogramms und der ersten maximalen Amplitude

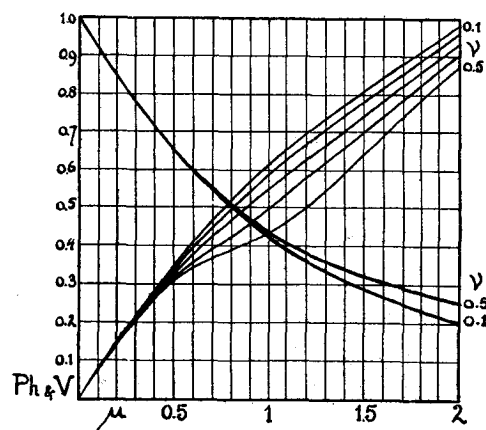


Fig. 15.

der Erdbewegung für die verschiedenen ν Werte, sie fallen regelmässig ab. Dagegen zeigen die Kurven der Phasenverschiebung Ph einen eigenartigen Verlauf. Für geringe μ Werte zusammen gehend, divergieren die Kurven stark zwischen $\mu = 0,5$ und $\mu = 1$, um sich nachher wieder einander allmählich zu nähern. Dieser Effekt ist eine sekundäre Resonanzerscheinung. Will man die Werte der Phasenverschiebung in der Periode der Erdbewegung ausgedrückt haben, so muss man die aus der Figur entnommenen Beträge durch 2π dividieren. Die Phasenverschiebung ist in viel stärkerem Grade von ν abhängig als der Vergrößerungsfaktor. Die wahre Vergrößerung erhält man, indem man den der Figur entnommenen Wert mit dem mechanischen Uebersetzungsfaktor des jeweiligen Instrumentes multipliziert. Die Phasenverschiebung und Vergrößerung des ersten Maximums wollen wir mit Ph_1 und V_1 bezeichnen.

Als Lage des zweiten Maximums einer jeden Kurve wurde die Mitte der beiden Nullstellen zu beiden Seiten dieses Maximums genommen. Daraus berechnete ich die absoluten Werte dieser zweiten Maxima.

Weiter dividierte ich die Abstände der beiden genannten Nullstellen durch π . Dieser Quotient sei mit μ' bezeichnet. Er ist nicht mit μ identisch, aber es gelingt, den korrespondierenden μ Wert aus jedem μ' Wert abzuleiten. Die μ' Werte sind in der Figur 16 graphisch dargestellt, und zwar in den stark ansteigenden Kurven. Merkwürdigerweise überschneiden sich die Linien alle in einem bestimmten Punkte, dessen Koordinaten $\mu = 1,18$ und $\mu' = 0,97$ sind. Diese Werte sind einander also eindeutig zugeordnet. Die übrigen Kurven dieser Figur stellen die Werte der Quotienten der ersten und zweiten Maxima dar. Alle diese Kurven zeigen ein deutliches Minimum, d. h. es wird hier die Resonanzerscheinung sichtbar, indem die zweiten Maxima in der Nähe $\mu = 1$ höher verlaufen als die Maxima für geringere oder grössere μ Werte.

Wie diese Kurven zu benutzen sind, werde ich jetzt an einigen Beispielen zeigen. Es sei vorläufig abgesehen von der Reibung des Schreibstiftes auf dem berussten Bogen, wie das für ein optisches Seismogramm genau zutrifft. Wir wählen die Registrierung des Nordjapanischen Bebens vom 18. Oktober 1920 durch ein kleines Wiechert-Horizontalpendel aus De Bilt. Die Eigenperiode des Apparates betrug damals 4,8 Sekunden, die mechanische Vergrößerung $NS = 166$, $EW = 199$. Es handle sich erstens darum, die absolute Grösse der Amplitude des ersten Maximums der P Phase der Erdbewegung in der E—W Richtung zu bestimmen. Wir entnehmen dem Seismogramm die Absolutwerte der ersten Amplituden:

$$a_1 = 1,1 \text{ mm.} \quad a_2 = 2,5 \text{ mm.} \quad \dots \quad (16)$$

und die Länge der zweiten halben Welle:

$$0,35 \text{ mm} \quad \dots \quad (17)$$

Wir bilden den Quotienten der beiden Amplituden:

$$\frac{a_1}{a_2} = 0,44 \quad \dots \quad (18)$$

Im Zeitmaassstab entsprechen 6 Sekunden einem mm. Es ist also:

$$\mu' = \frac{2 \times 0,35 \times 6}{4,8} = 0,88 \quad \dots \quad (19)$$

Wir entnehmen nun der Figur 16 für $\frac{a_1}{a_2} = 0,44$ und $\mu' = 0,88$ die korrespondierenden ν und μ Werte und konstruieren dementsprechend in einem $\mu\nu$ Diagramm zwei Kurven und suchen deren Schnittpunkt (Figur 17). Die Koordinaten dieses Schnittpunktes sind die gesuchten Werte μ und ν , in diesem Falle:

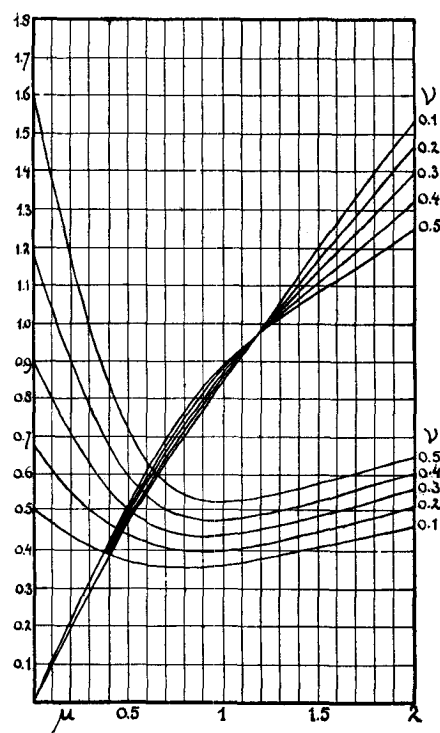


Fig. 16.

$$\mu = 1,08 \quad \nu = 0,295. \quad (20)$$

Nun suchen wir in Figur 15 die entsprechenden Werte für V_1 und Ph_1 und finden:

$$V_1 = 0,42 \quad Ph_1 = 0,55 \quad (21)$$

Die wahre Bodenamplitude des ersten Maximums war also:

$$A_1 = \frac{1,1}{0,42 \times 166} = 0,0158 \text{ mm} = 15,8 \text{ micron}. \quad (22)$$

Die Phasenverschiebung in Sekunden ausgedrückt:

$$\frac{0,55}{2\pi} \cdot 1,02 \cdot 4,8 = 0,43 \text{ Sekunde} \quad (23)$$

Drei solcher graphischen Rechnungen nach den Aufzeichnungen dreier Instrumente, mögen ihre Eigenperioden sein wie sie wollen, lassen uns das Azimuth des Epicentrums und den Emergenzwinkel des longitudinalen Erdbebenstrahles finden.

Die Beispiele sind gewählt nach dem Grundsatz, dass die betrachtete Phase scharf ist und vom Ruhezustande des Seismographen aus einsetzt. Bei superponierten Phasen kommt man nicht zum Ziele.

Für die S Phase des gleichen Bebens können wir die analoge Rechnung durchführen. Die ersten Amplituden des transversalen Einsatzes in der $E W$ Richtung sind:

$$a_1 = 2,5 \text{ mm} \quad a_2 = 4,4 \text{ mm} \quad (24)$$

und die zweite halbe Welle hat die Länge:

$$0,5 \text{ mm} \quad (25)$$

Also erhalten wir:

$$\frac{a_1}{a_2} = 0,57 \quad (26)$$

und

$$\mu' = \frac{2 \times 0,5 \times 6}{4,8} = 1,25 \quad (27)$$

Wenn wir der Figur 16 für diese Quotienten die korrespondierenden μ und ν Werte entnehmen, erhalten wir die beiden Kurven der Figur 18, welche sich in dem Punkte

$$\mu = 1,84 \quad \nu = 0,385 \quad (28)$$

schnneiden.

Damit erhalten wir aus Figur 15:

$$V_1 = 0,27 \quad Ph_1 = 0,85 \text{ u.s.w.} \quad (29)$$

Wenn wir die Zeitbestimmung im Seismogramm auf die höchste Präzision bringen könnten, wären wir somit einen Schritt weiter auf dem Wege der Untersuchung der wahren Bodenbewegung. Es könnten mit mehr Erfolg als bisher die Fragen nach der Polarisierung der transversalen Wellen und andere in Angriff genommen werden.

Hier ist der Verlauf der Rechnung in seiner einfachsten Form dargestellt. Welchen Schwierigkeiten man etwa dabei begegnen kann, werden wir an einem zweiten Beispiele zeigen. Es seien sowohl das NS wie das EW Diagramm des Turkestaner Bebens vom 15 November 1921 zur Analyse vorgenommen und zwar die S Phase. Bei einem kleinen Instrumente, wie dem hierbei gebrauchten Wiechertschen 120 K.G. Pendel, und der geringen

Vergrößerung und Papiergeschwindigkeit ist μ' nie mit grosser Präzision zu messen. In dem vorliegenden Falle findet man für beide Komponenten etwa;

$$\mu' = 1,25 \quad (31)$$

Im $\mu \nu$ Diagramm bekommen wir jetzt zwei Kurven, welche dieselbe Kurve schneiden, und daher zwei Schnittpunkte mit den Koordinaten (Figur 19);

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1 = 1,64 \quad \nu_1 = 0,22 \\ \mu_2 = 1,76 \quad \nu_2 = 0,34 \end{array} \right\} \quad (31)$$

Es sollten, wenn die Quotienten a_1/a_2 verschieden ausfallen, auch die μ' verschieden sein, und zwar so, dass sich für beide Komponenten dasselbe μ ergibt. Man wird in einem derartigen Falle gut tun, den Mittelwert der

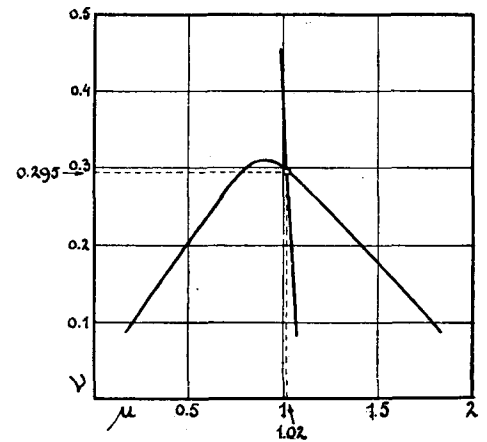


Fig. 17.

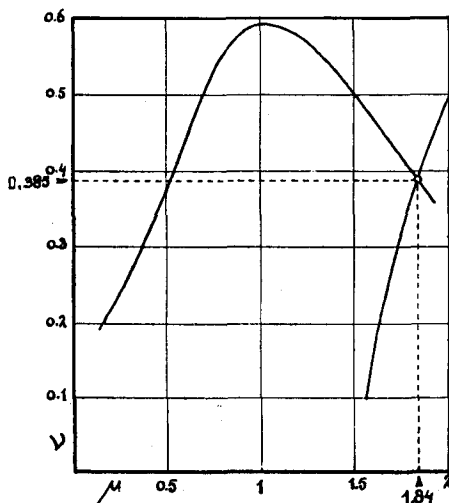


Fig. 18.

beiden μ Werte zu nehmen und aus diesem die beiden ν Werte zu konstruieren, wie es in der Figur 19 geschehen ist. Jetzt finden wir aus Figur 15:

$$\begin{array}{ll} NS & V_1 = 0,26 \quad Ph_1 = 0,85 \\ EW & V_1 = 0,28 \quad Ph_1 = 0,80 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (32)$$

Wenn wir gar die Arbeit über drei Komponenten erstrecken, werden wir oft genötigt sein, einen Mittelwert oder einen wahrscheinlichen Wert aus drei T_p Werten zu bilden und daraus erst die entsprechenden drei μ zu berechnen und weiter die ν zu konstruieren.

Der weitaus grösste Uebelstand, den wir in der praktischen Anwendung dieser Methode zu eliminieren haben, ist der Einfluss der mechanischen Reibung des Schreibstiftes auf dem beruhten Bogen. Man kann wohl behaupten, dass für die feinere Anwendung zur wissenschaftlichen Erforschung der verschiedenen Wellenarten im Erdinnern die optische Registrierung unerlässlich ist. Man wird aber immerhin bei Instrumenten, bei welcher die Reibungskraft sich als nahezu konstant erweist, mit einer etwas umständlicheren Rechnung auch zum Ziele kommen oder wenigstens eine gewisse Annäherung an das erwünschte Resultat erreichen. Aber wenn man von einer Konstanz der Reibungskraft weit entfernt ist, wie bei den meisten mechanisch registrierenden Apparaten, wird man von einer Anwendung der Methode, welche ich jetzt beschreiben will, absehen müssen, denn die Fehler wären vielleicht ebenso gross wie die, welche bei Vernachlässigung der Reibung

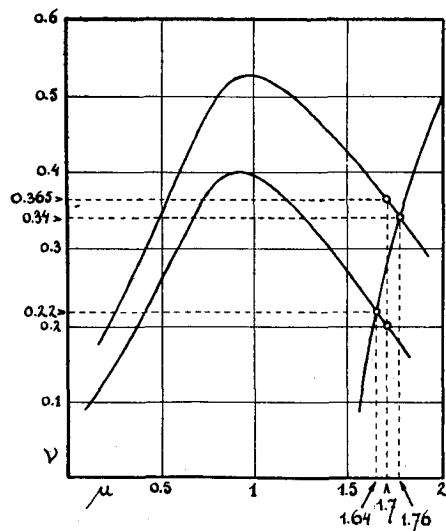


Fig. 19.

entstehen. Beim Züricher Apparat sind die Verhältnisse in dieser Hinsicht günstig. Es würde sich lohnen, aus den Registrierungen, welche damit jetzt gemacht werden und welche erst diesen Sommer nach der Einstellung der Astatisierung ihren wahren Wert erhalten haben, eine statistische Untersuchung zu beginnen.

Wir können die Bewegungsgleichung, wenn wir eine konstante Reibungskraft einführen, allgemein schreiben:

$$\varphi'' + 2\lambda\varphi' + \mu^2(\varphi \pm \rho) = f(y) \quad (33)$$

Die Faktoren ρ für die drei Komponenten:

$$\rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3 \quad \dots \quad (34)$$

entnehmen wir Reibungsfiguren. (Man sollte solche in regelmässigen Zeitabständen aufnehmen, oder wenigstens nach jedem bedeutenden Beben, welches man analysieren will).

ρ ist einfach der vierte Teil des Unterschiedes zweier aufeinander folgenden gleichsinnigen Maxima der Reibungskurve, wobei die Dämpfung auszuschalten ist. Wenn ρ konstant ist, sollte dieser Unterschied stets derselbe sein.

Das Integral von (33) für die Bewegung bis zum ersten Maximum ist:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \rho \{ e^{-\lambda y} \{ \cos(y\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) + 0,513 \sin(y\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) \} - 1 \} \quad (35)$$

wobei $\bar{\varphi}$ nach (11) berechnet wird und positiv sein möge. Wenn der Faktor ρ eine universelle Konstante wäre, könnte man ebenso gut allgemein mit (35) wie mit (11) rechnen. Da aber ρ variabel und für verschiedene Instrumente verschieden ist, muss man ρ unbestimmt lassen. Wir wollen annehmen, dass durch die Reibung keine bedeutende Phasenverschiebung bewirkt wird, was bei kleiner Reibung erlaubt sein dürfte. Man braucht dann nur die Kurven

$$f_1 = -e^{-\lambda y} \{ \cos(y\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) + 0,513 \sin(y\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) \} + 1 \quad (36)$$

zu tabellarisieren und graphisch darzustellen. Dies ist in Figur 20 geschehen. Die Kurven nähern sich asymptotisch dem Werte 1. Wenn φ_1 die gemessene Amplitude im Seismogramm für das erste Maximum ist, so ist der Absolutwert der damit korrespondierenden Erdablenkung:

$$A_1 = \frac{\varphi_1 + f_1 \rho}{V_1 k} \quad (37)$$

wobei V_1 den bekannten Vergrösserungsfaktor, k den mechanischen Uebersetzungsfaktor darstellt. Uebrigens gibt es für jedes μ ein A_1' , wobei der Schreibstift überhaupt in Ruhe bleibt. Je länger die Erdperiode T_p ist, um so höher liegt dieser Wert:

$$A_1' = \frac{f_1 \rho}{V_1 k} \quad (38)$$

Dies soll die Schwächen der Methode andeuten. Bei schwachen Einsätzen wird man hie und da das erste Maximum übersehen. Aber dann

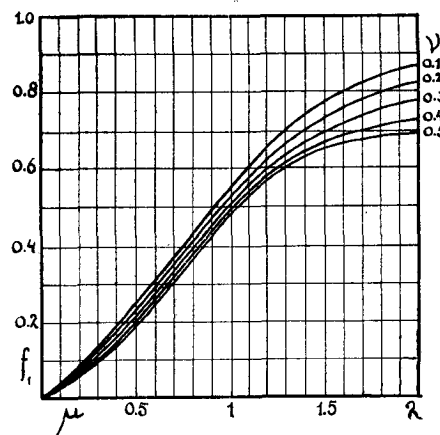


Fig. 20.

ist auch überhaupt nichts genaues zu erreichen. Will man genaue Resultate erzielen, so muss das zweite Glied im Zähler von A_1 klein sein gegen φ_1 .

Wenn μ' genügend klein bleibt, d. h. wenn die Eigenperiode des Seismographen sehr gross ist im Verhältnis zur Bebenperiode, wird man zur Ermittlung des Absolutwertes des ersten Maximums meistens ohne Kenntnis des zweiten auskommen. Wenn $\mu' < 0,5$ ist, ist mit genügender Genauigkeit $\mu' = \mu$, und V_1 und Ph_1 bestimmen sich eindeutig.

Bei der Bestimmung des Faktors f_1 herrscht immerhin eine gewisse Unsicherheit, aber man wird ohne weiteres einen gewissen Mittelwert von f_1 annehmen können. Damit wäre die Frage nach dem Absolutwert des ersten Maximums einer Erdbebenphase gelöst. Es zeigt sich nochmals der grosse Vorteil langperiodischer Instrumente, welche auch im allgemeinen eine viel schärfere Bestimmung von ρ erlauben als die kurzperiodischen. Doch wird selbst in diesem Fall die Bestimmung von ρ kein sehr grosses Vertrauen verdienen. Man kann nicht oft genug wiederholen, dass man, wenn es gilt, absolute Amplituden zu bestimmen, entweder optische Registrierung vorsehen oder die Vergrösserung unter der Grenze halten sollte, innerhalb der man den Einfluss der Reibung vernachlässigen darf. Nur dann sind die Diagramme wissenschaftlich korrekt verwertbar. Was das Züricher Instrument betrifft, könnten wir etwa Folgendes sagen: Wenn wir 2 mm als Mindestwert der Amplitude des ersten Maximums φ_1 annehmen, der sich für genaue Messung eignet, wenn wir ferner die Fehlergrenze auf 0,1 mm ansetzen, werden wir etwa fordern, dass der Wert

$$f_1 \rho \dots \dots \dots (39)$$

auch den Wert 0,1 mm nicht übersteigt, und da

$$f_1 < 1 \dots \dots \dots (40)$$

ist, darf ρ höchstens 0,1 mm sein. Wenn wir die Vergrösserung eines Apparates verringern, wird ρ mit dem Quadrate dieser Vergrösserung abnehmen. Beim betrachteten Seismographen im heutigen Betriebe überschreitet ρ nach den Versuchen sicher nicht den Wert 2 mm. Wenn man also die Vergrösserung auf den

$$\sqrt{\frac{0,1}{2}} \text{ ten} \dots \dots \dots (41)$$

Teil des jetzigen Betrages 1500, also auf rund 350 reduzieren würde, könnte man auch im ungünstigsten Falle den Einfluss der Reibung innerhalb der Messungsungenauigkeit bringen, ohne befürchten zu müssen, dass die Häufigkeit der Beben, welche ein erstes Maximum > 2 mm aufweisen, zu sehr heruntergedrückt wäre.

Wenn μ' nicht so gering ist, dass man ein eindeutiges μ bestimmen kann, wird man in folgender Weise zum Ziele gelangen. Es werde wiederum angenommen, dass die Reibung auch im zweiten Maximum keine weitere Phasenverschiebung veranlasst. Dann wird man leicht den Wert bestimmen können, den man zum zweiten Maximum hinzurechnen muss, um die Amplitude zu bekommen, die ohne Reibung aufgezeichnet würde. Der Absolutwert dieser Länge beträgt:

$$\rho \left[e^{-\lambda y_2} \{ \cos (y_2 \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) + 0,513 \sin (y_2 \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) \} \cdot \right. \\ \left. \cdot \{ - e^{-\lambda y_1} (\cos (y_1 \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) + 0,513 \sin (y_1 \sqrt{\mu^2 - \lambda^2})) + 2 \} - 1 \right] \dots \dots \dots (42)$$

wobei unter y_2 der Abstand der beiden ersten Maxima zu verstehen ist.

Wir wollen daher einen zweiten Faktor f_2 einführen:

$$f_2 = - e^{-\lambda y_2} \{ \cos (y_2 \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) + 0,513 \sin (y_2 \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) \} \cdot \\ \cdot \{ - e^{-\lambda y_1} (\cos (y_1 \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) + 0,513 \sin (y_1 \sqrt{\mu^2 - \lambda^2})) + 2 \} - 1 \dots \dots (43)$$

oder:

$$f_2 = - e^{-\lambda y_2} \{ \cos (y_2 \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) + \\ + 0,513 \sin (y_2 \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) \} \{ f_1 + 1 \} + 1 \dots \dots \dots (44)$$

welcher Faktor in Figur 21 graphisch dargestellt ist.

Für $y_2 = 0$ ist $|f_2| = |f_1|$, was ja selbstverständlich ist.

Für den Quotienten der 2 ersten maximalen Ausschläge ist also mit Rücksicht auf die Reibung zu nehmen:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\varphi_1 + f_1 \rho}{\varphi_2 + f_2 \rho} \dots \dots \dots (45)$$

Man wird nun folgenden approximativen Weg einschlagen.

Wir messen:

$$\mu' \quad \varphi_1 \quad \varphi_2.$$

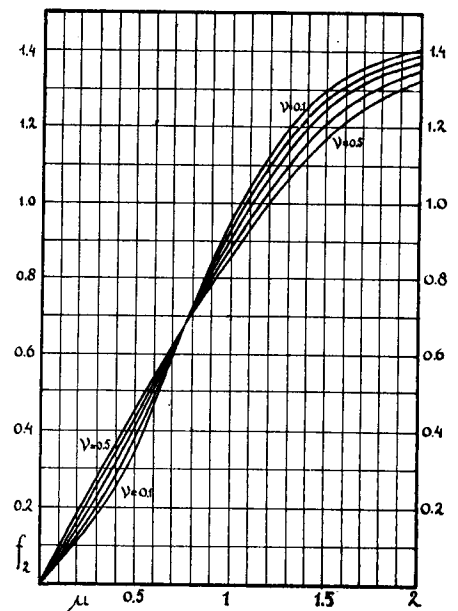


Fig. 21.

Es sei vorläufig der Mittelwert $\nu = 0,3$ angenommen. Damit wird man in erster Annäherung ein μ , f_1 und f_2 finden und weiter ein

$$\frac{a_1}{a_2} \dots \dots \dots (46)$$

Mit Hilfe dieses Quotienten und des μ' bestimmt man jetzt nach der früheren Methode ein neues ν , μ , f_1 und f_2 . Wenn man dieses Verfahren wiederholt, erhält man schliesslich feste Werte für μ und ν , mit welchen V_1 und Ph_1 , die Vergrösserung und die Phasenverschiebung, bestimmt werden können. Die Konvergenz dieser Methode ist meistens sehr gut. Ein Beispiel sei zur Erläuterung gegeben. Wir wollen annehmen, der kleine Wiechertsche Apparat, von dem wir die Seismogramme untersuchen, erlaube eine genügend scharfe Bestimmung von ρ , und zwar sei:

$$\rho \cong 1 \text{ mm} \dots \dots \dots (47)$$

Die S Phase des Japanischen Bebens vom 10ten April 1918 setzt sehr scharf ein, und zwar finden wir:

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_1 & \varphi_2 \\ NS & 1,3 & 3,2 \text{ mm} \\ EW & 3,8 & 10,1 \text{ mm} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} & \varphi_1 & \varphi_2 \\ NS & 1,3 & 3,2 \text{ mm} \\ EW & 3,8 & 10,1 \text{ mm} \end{array}} \right\} \mu' = 1,08 \dots \dots \dots (48)$$

Wir nehmen $\nu = 0,3$ an und finden $\mu = 1,40$, $f_1 = 0,67$, $f_2 = 1,19$ und weiter mit (45):

$$\begin{array}{ccc} & \frac{a_1}{a_2} & \mu \\ NS & 0,449 & 1,38 \\ EW & 0,396 & 1,34 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} & \frac{a_1}{a_2} & \mu \\ NS & 0,449 & 1,38 \\ EW & 0,396 & 1,34 \end{array}} \right\} \text{damit} \dots \dots \dots (49)$$

Wir nehmen den Mittelwert $\mu = 1,36$ und erhalten:

$$\begin{array}{ccc} NS & f_1 = 0,68 & f_2 = 1,19 \\ EW & f_1 = 0,73 & f_2 = 1,24 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} NS & f_1 = 0,68 & f_2 = 1,19 \\ EW & f_1 = 0,73 & f_2 = 1,24 \end{array}} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

und damit wiederum:

$$\begin{array}{ccc} & \frac{a_1}{a_2} & \\ NS & 0,451 & \\ EW & 0,400 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} & \frac{a_1}{a_2} & \\ NS & 0,451 & \\ EW & 0,400 & \end{array}} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

Diese Werte sind so wenig verschieden von denen der ersten Approximation (49), dass man das Verfahren schon hier abbrechen kann.

Wir erhalten für das erste Maximum der betrachteten S Phase

$$\begin{array}{ccc} & V_1 & Ph_1 & A_1 \\ NS & 0,33 & 0,72 & 0,035 \text{ mm} \\ EW & 0,32 & 0,76 & 0,071 \text{ mm} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} & V_1 & Ph_1 & A_1 \\ NS & 0,33 & 0,72 & 0,035 \text{ mm} \\ EW & 0,32 & 0,76 & 0,071 \text{ mm} \end{array}} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

womit das Problem gelöst ist.

XXII. Kriterium der Zuverlässigkeit von Instrumenten verschiedener Bauart.

Es ist eine allbekannte Tatsache, dass oft 2 oder mehr Beben registriert werden, welche identischen Charakter haben, deren Kurven sogar einander zum Verwechseln ähnlich sein können. Verschiedene markante Beispiele sind im Laufe der Zeit diskutiert worden. Sie gaben Veranlassung zu der Schlussfolgerung, dass im allgemeinen ein tektonisches Beben sehr einfacher Natur sein muss, und dass das charakteristische Aussehen der registrierten Schwingungen erst von den Brechungen und Reflexionen herrührt, welche die erregte Welle auf ihrem Wege durch das inhomogene Erdinnere erleidet. Es erscheint freilich noch als fernes Ziel, aus einer mathematischen Analyse aller Seismogramme ein Bild des Erdinnern nicht nur im grossen, sondern auch in Einzelheiten zu konstruieren.¹⁾ Weit entfernt von der Lösung einer solchen Frage ist es angezeigt, auf eine andere Untersuchung hinzuweisen, welche sich an Hand identischer Beben durchführen lässt.

Selbstverständlich tritt die Aehnlichkeit zweier Seismogramme um so deutlicher hervor, je weniger verschieden die Amplituden in beiden sind. Diese Tatsache darf aber nicht so interpretiert werden, als ob Identität zweier Seismogramme überhaupt nur auftrete, wenn die Intensitäten der beiden Beben wenig verschieden sind. Dies möchte ich an Hand eines treffenden Beispieles zeigen, nämlich des Erdbebenschwarmes, welcher im Laufe des 15ten und 16ten August 1916 in Mittel-Italien auftrat. Es tritt dabei besonders in zwei mittelschweren Beben dieses Schwarmes die Identität der Seismogramme in solcher Schärfe hervor, dass man diese nahezu zur Deckung

¹⁾ A. de Quervain: Identische Seismogramme. Schweiz. Erdbebenbericht 1919.

bringen kann. Abgesehen davon, dass alle Beben dieses Schwarmes auf den gleichen Typus zurückführbar sind, scheint man übersehen zu haben, dass das Diagramm des schwersten der Beben mit den beiden schon als identisch erwiesenen Mittelschweren congruent erscheint, wenn man es im Maassstabe 1:10 reduziert. Figur 22 zeigt die drei N.S. Galitzindiagramme, welche in die Bilt erhalten wurden. Das mittlere ist das reduzierte.

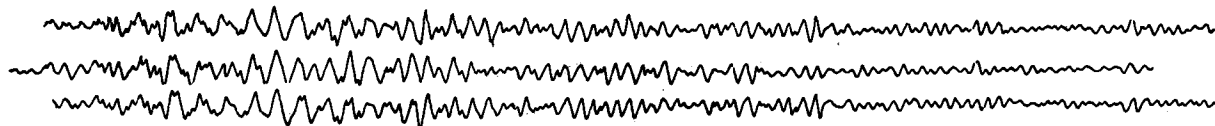


Fig. 22.

Die Aehnlichkeit mit den beiden übrigen springt dermaassen in die Augen, dass wohl niemand bezweifeln wird, dass hier ein Beispiel der Identität, sagen wir zweier Beben aufgedeckt ist, deren Intensitäten, (welche den Quadraten der Amplituden proportional sind,) sich wie 100:1 verhalten. Worauf ich nun aber im besondern aufmerksam machen wollte, ist folgendes. Wenn wir zwei Instrumente verschiedener Bauart besitzen und zwei identische Beben gleicher Intensität eintreffen, so wird jedes Instrument zwei identische Seismogramme entwerfen, welche aber mit Rücksicht auf die verschiedene Bauart unter sich nicht zur Deckung gebracht werden können. Wenn wir nun fragen, welches Instrument die genauere Darstellung der wahren Bodenbewegung gegeben hat, fehlt uns der Anhaltspunkt zur Entscheidung. Wir werden aber im Besitze eines Kriteriums sein, wenn zwei identische Beben verschiedener Intensität eintreffen. Wir können die beiden Seismogramme jedes Instrumentes auf gleichen Maassstab bringen. Bei keinem Instrumente wird es in diesem Falle gelingen, ihre beiden Seismogramme zur Deckung zu bringen, denn es werden nie alle Eigentümlichkeiten proportional mit den Amplituden wachsen. Also wird man ruhig behaupten können, dass dasjenige Instrument die genauere Darstellung der wahren Bodenbewegung gibt, dessen beide Seismogramme am besten zur Deckung gebracht werden können. Wie wir sehen, leistet der Galitzinsche Seismograph in dieser Hinsicht ganz sicher sehr Bedeutendes.

XXIII. Das Japanische Beben vom 1-IX-1923 und die Frage der Herdtiefe.

Meine Hoffnung, dass das grosse japanische Beben, welches Anfangs September Tokyo verwüstete, mir die erste Gelegenheit bieten würde, die skizzierte μ Methode auf die Züricher Seismogramme mit Erfolg anzuwenden, ist leider getäuscht worden. Es waren viele Ursachen dafür vorhanden. Erstens wurden die Schreibfedern zwei Sekunden nach dem Einsatze der P Phase, beim Minutenzeichen, abgehoben, womit die ersten schwachen Wellen zur Verwertung verloren gingen. Zweitens zeigte eine Konstantenbestimmung, dass die Vertikalperiode des Apparates im Moment nicht höher lag als 1,5 Sekunden, die Astatisierung also nur etwas mehr als zweifach war und daher Wellen, deren Periode 3 Sekunden überstieg, durch die Beschränkung unserer graphischen Darstellungen nicht zur Behandlung tauglich waren. Es kam nur der Anfang der P Phase mit seinen kurzen Wellen für die Theorie in Betracht. Aber die P Phase zeigt nur ein chaotisches Gemisch von superponierten Wellen, aus welchen nur eine brauchbare Stelle, einige Sekunden nach dem ersten Minutenzeichen, herausgeschält werden konnte. Gegen Verwendung dieser Stelle kann man mit Recht das grösste Misstrauen hegen. Die Amplituden sind nämlich sehr gering. Deswegen spielt die Reibung eine überwiegende Rolle. Weiter ist ein μ' nur im Vertikal-seismogramm mit einiger Sicherheit zu bestimmen, und die Schreibfedern waren vor dem Einsatz der betreffenden Welle schon nicht in der Nulllage und nicht ganz ruhig. Dagegen hat man den Vorteil, wohl behaupten zu können, dass an der betrachteten Stelle eine neue longitudinale Welle einsetzte. Auch war der Einfluss der microseismischen Bewegung gänzlich zu vernachlässen.

Ungeachtet der vielen Fehler, welche einer Azimuth-und Emergenzwinkelbestimmung unter diesen ungünstigen Umständen anhaften müssen, wollte ich nicht versäumen, dieses Beispiel anzuführen, um zu zeigen, wie man immerhin, tastend, einen Weg finden kann zur Beantwortung der Fragen, welche uns hier beschäftigen.

Es ergab sich:

	T	ρ	μ'	φ_1	φ_2	
NS	3,23	1,21	—	1,8	1,5	} (1)
EW	2,97	1,66	—	1,1	0,1	
V	1,5	2,5	0,94	0,9	1,1	

Mit dem μ' Werte für die Vertikalperiode hängt glücklicherweise eindeutig zusammen $\mu = 1,1$ und daher ist:

$$T_p = 1,65 \text{ Sek.} \quad (2)$$

Daraus entnehmen wir jetzt:

$$\begin{array}{cc} & \mu \\ NS & 0,51 \\ EW & 0,56 \end{array} \left\{ \dots \dots \dots (3)\right.$$

und eindeutig:

$$\begin{array}{cc} & V_1 \\ NS & 0,66 \\ EW & 0,62 \end{array} \left\{ \dots \dots \dots (4)\right.$$

$\varphi_2 = 0,1$ aus dem EW Diagramme entspricht in seinem Verhältnisse zu φ_1 nicht den logischen Erwartungen. Es könnte durch irgendwelche Ursache gefälscht sein. Ob dem so ist, wäre kaum zu entscheiden. Das Rechnen mit $\varphi_2 = 0,1$ geht aber auch nicht. Wir beschäftigen uns darum vorläufig nur mit NS und V .

Die vorläufige Annahme $\nu = 0,3$ liefert uns:

$$\begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & \frac{a_1}{a_2} \\ NS & 0,22 & 0,42 & 1,03 \\ V & 0,55 & 0,99 & 0,63 \end{array} \left\{ \dots \dots \dots (5)\right.$$

Der Wert $\nu = 0,3$ erscheint mit den Werten für a_1/a_2 unverträglich. Eine Extrapolation der Figur 16 zeigt vielmehr den Wert $\nu = 0,7$ für beide Komponenten als zweite Annäherung.

Damit erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & \frac{a_1}{a_2} \\ NS & 0,17 & 0,49 & 0,96 \\ EW & 0,50 & 0,89 & 0,64 \end{array} \left\{ \dots \dots \dots (6)\right.$$

Diese Werte für a_1/a_2 erscheinen immer noch sehr wohl mit dem Werte $\nu = 0,7$ verträglich. Wir können uns daher eine weitere Annäherung ersparen. Wo in beiden Komponenten $\nu = 0,7$ erscheint, erlauben wir uns, diesen Wert auch für die EW Komponente gültig zu erklären. Die endgültige Zusammenstellung ist daher:

$$\begin{array}{ccccc} & \mu & \nu & V_1 & A_1 \\ NS & 0,51 & 0,7 & 0,65 & 3,09 : k_1 \\ EW & 0,56 & 0,7 & 0,62 & 2,31 : k_2 \\ V & 1,1 & 0,7 & 0,41 & 5,25 : k_3 \end{array} \left\{ \dots \dots \dots (7)\right.$$

wo k_1 k_2 k_3 die bezüglichen mechanischen Uebersetzungsfaktoren darstellen. Wenn wir:

$$k_1 = k_2 \dots \dots \dots (8)$$

setzen, was angenähert der Fall ist, erhalten wir für den Tangens des Winkels zwischen der Richtung NS und der Richtung nach dem Epicentrum hin:

$$\frac{2,31}{3,09} = 0,75 \dots \dots \dots (9)$$

Der Tangens dieses Winkels betrug in Wirklichkeit 0,78. Das Resultat ist befriedigend; indessen ist zu bedenken, dass möglicherweise bedeutende Fehler sich kompensiert haben. Der Emergenzwinkel kann erst bestimmt werden, wenn wir k_3 kennen, was leider zur Zeit noch nicht mit genügender Genauigkeit der Fall ist.

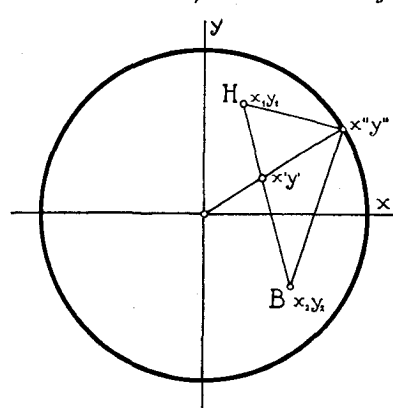


Fig. 23.

Es sollten jetzt noch einige Bemerkungen angebracht werden, welche ich beim Studium der Züricher Diagramme des besprochenen Bebens zu machen Anlass fand.

Wir betrachten zwei Punkte $H(x_1 y_1)$, $B(x_2 y_2)$ in der Erdkugel, deren Radius r betragen möge (Figur 23). In H sei der Herd eines Bebens, in B sitze ein fiktiver Beobachter. Es mögen die Erdbebenstrahlen gerade Linien sein. Wie viel einmal reflektierte Wellen wird B nach der direkten Welle wahrnehmen? Es ist das Problem des kreisförmigen Billiards. Um die Frage zu entscheiden, ziehen wir einen Radius

$$y = \mu x \dots \dots \dots (10)$$

Der Endpunkt dieses Radius sei $x'' y''$ und der Radius schneide die Verbindungslinie der Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ im Punkte $x' y'$. Wenn wir nun fordern:

$$\frac{(x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2}{(x_2 - x')^2 + (y_2 - y')^2} = \frac{(x_1 - x'')^2 + (y_1 - y'')^2}{(x_2 - x'')^2 + (y_2 - y'')^2} \dots \dots \dots (11)$$

ist $x''y''$ ein einmaliger Reflexionspunkt an der Oberfläche, mit Ausnahme der Schnittpunkte der Geraden durch x_1y_1 und x_2y_2 mit dem Kreisumfange, welche beiden trivialen Fälle in der Forderung (11) mit enthalten sind.

Wir können $x_1 y_1 x_2 y_2$ noch einer Bedingung unterwerfen, ohne die Allgemeinheit des Resultates zu beeinträchtigen und wählen:

[illegible]

schon genannten kurzen Referate zu lesen ist, mit einer scharfen P Phase registriert. Für Zeitangaben und Distanzschätzungen ist der Apparat auch in Bezug auf Fernbeben besonders gut geeignet. Die mechanische Registrierung hat den Vorteil, eine besonders feine Kurve zu liefern, deren geringste Ausbuchtungen mit Schärfe wahrgenommen werden können. Wenn man nun aber ein solches Instrument besitzt, welches nach seiner Ausstattung zu den vorzüglichsten und nach seiner Masse zu den schwersten gehört, wird man sich im Interesse der Wissenschaft bemühen, alle Angaben von dem Instrumente zu fordern, welche es zu liefern im stande ist. Aus diesem Gesichtspunkte heraus sahen wir, *dass es besonders wertvoll sein müsste, den Apparat einige Jahre lang Angaben über die Fernbeben sammeln zu lassen, während welcher Zeit man seine Vergrößerung auf 350 herabsetzen sollte, damit man vom Einflusse der mechanischen Reibung abstrahieren kann.*

Mit grösserer Sorgfalt, als es bis jetzt geschah, könnte man den Emergenzwinkel eines longitudinalen Strahles bestimmen und die Frage nach der Polarisierung des transversalen Strahles in Angriff nehmen, denn mit der entwickelten Methode lässt sich die Phasenverschiebung der Schreibstiftbewegung gegenüber der Erdbewegung schärfer beurteilen, als es möglich ist, wenn man sich auf reine Sinuswellen beschränkt, wie das bisher üblich war.

Was man aber dazu noch vielleicht erreichen könnte, wäre eine Klassifikation der Erdbebentypen nach dem Azimuth oder der Distanz des Epizentrums. Es wäre nicht ausgeschlossen, dass bestimmte Werte für μ oder ν auf eine bestimmte Lage des Epizentrums hindeuten. Wenn eine statistische Untersuchung dies zeigen würde, hätte man eine neue Richtlinie zur Interpretation der Seismogramme. Die Grösse ν hängt unmittelbar zusammen mit dem mehr oder weniger schnellen Abklingen einer Erzittrung, welche sich an der Stelle des Beobachters kund gibt. Vielleicht liegt also darin eher ein Maass für die Härte oder Weichheit des Untergrundes des Observatoriums als für den Charakter des ersten Anstosses im Herde. Es zeigen sich da viele Probleme, die einer Lösung harren.

Möge die hier gegebene $\mu\nu$ Methode der seismologischen Wissenschaft ein kleines Hilfsmittel in die Hand geben, um die wahre Bewegung eines Punktes der bebenden Erdoberfläche zu bestimmen.

LEBENS LAUF.

Ich, HENDRIK PETRUS BERLAGE, wurde am 26sten Oktober 1896 in Amsterdam geboren. Dort besuchte ich die Elementar- und Mittelschule. Den Maschinenbau als künftigen Beruf wählend, trat ich im Jahre 1915 in die technische Hochschule von Zürich ein und bestand die Diplomprüfung im Jahre 1919. Indessen wechselte die Richtung meiner Interessen, und ich ging zur theoretischen Physik über. Im Jahre 1920 konnte ich meine Studien fortsetzen. Während mehrerer Semester besuchte ich die mathematische und theoretisch physikalische Vorlesungen in Leiden. Den Winter 1922—1923 widmete ich dem Studium der seismometrischen Apparate. Den Sommer 1923 verbrachte ich in Zürich mit vorliegender Arbeit. Es erschienen einige Aufsätze aus meiner Feder auf theoretisch-physikalischem Gebiete in der holländischen Monatschrift *Physica* und den Entwurf zu einer Kosmogonie in den *Astronomischen Nachrichten*.
